物質中のMaxwellの方程式

山本昌志*

2004年9月10日

1　物質中の電場

原子に電場を加えると、分極が発生し、図1のように電気双極子 $\boldsymbol{p}$ として取り扱うことができる。物質中では、これが密度 N で存在するとして、それを考慮して分極ベクトル

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= Nq\boldsymbol{\delta} \\ &= N\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{1}$$

が定義できる。図からわかるように、ある表面積 S を通り抜ける総電荷量 Q は、

$$\begin{aligned} Q &= -SNq\delta\cos\theta \\ &= -S\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{2}$$

である。ここで、$\boldsymbol{n}$ は表面の法線方向である。負号になる理由は、法線方向と分極ベクトルの定義を考えれば分かるはずである。これから、単位表面あたり通り抜ける電荷量は、

$$\sigma_p = -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{3}$$

となる。この分極により、閉じた空間の電荷量は

$$\begin{aligned} \int \rho dV &= \int \sigma dS \\ &= -\int \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}dS \\ &\quad \text{ガウスの定理より} \\ &= -\int \nabla\cdot\boldsymbol{P}dV \end{aligned} \tag{4}$$

となる。この積分は任意の領域で成り立つため、

$$\rho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{5}$$

を導くことができる。

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

次に、この分極ベクトルが作る電流であるが、これは式 (3) から、直ちに導くことができる。

$$\boldsymbol{j}_p = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{6}$$

これを分極電流と言う。これで、分極ベクトルによる電荷と電流を導くこと g あできたので、誘電体中の Maxwell の方程式を書き直す準備ができた。

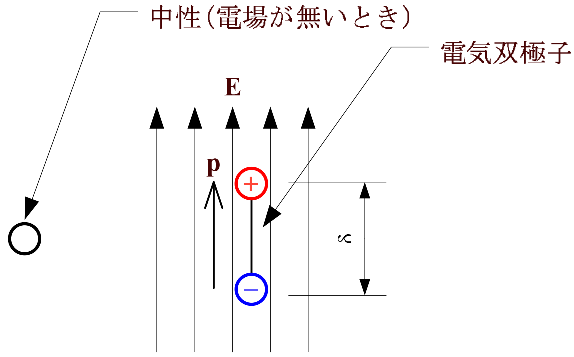

図 1: 原子が分極する様子

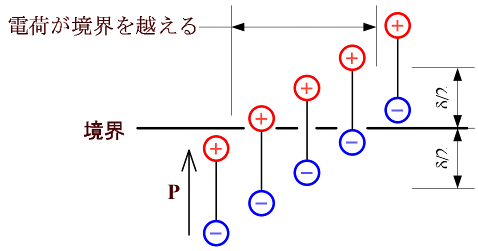

図 2: 境界を越えての電荷の移動 (境界と分極ベクトルが平行)

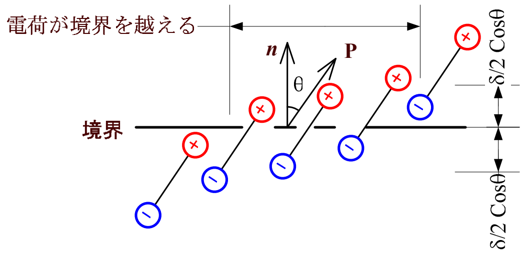

図 3: 境界を越えての電荷の移動 (境界と分極ベクトルが角度を持つ)

2 物質中の磁場

原子に電場を加えると、分極により、分極電荷が発生したような状況が磁性体中でも起きる。磁性体中では、もっともっと複雑なことが起きているが、ここでは、物質中のマックスウェルの方程式を書き改めるための概論にとどめる。

誘電体中で電荷が発生したように、磁性体中では電流が発生する。この電流の起源は、述べないが、次のような性質がある。

- 非常に小さい閉じた電流のループから成り立っている。

電流は、閉じたループの集まりなので、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j}_m = 0 \tag{7}$$

となる。閉じているので、湧き出しや吸い込みがないからである。これから、

$$j_m = \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{8}$$

と書ける。この $\boldsymbol{M}$ を磁化と言う。分極電荷は、電荷と電流を作ったが、磁化は電流は作るが電荷は作らない。

3　物質中の Maxwell の方程式について

ミクロ的な立場で見ると、Maxwell の方程式は、

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) \end{cases} \tag{9}$$

である。電磁場については、これが全てで、これを解けば全て分かる。分極による電場も、分極電荷から生じると考えれば、この式で十分である。分極電流もこれに含むことができる。磁化分極の電流も含めることができる。

しかし、分極電荷が問題となるような微少領域まで考えて、電磁場を計算するのは、いかにも大変である。そこで、マクロ的な立場から、Maxwell の方程式を書き直す。追加するのは、

$$\begin{cases} \rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{j}_p = \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \\ \boldsymbol{j}_m = \nabla \times \boldsymbol{M} \end{cases} \tag{10}$$

である。これに加えて、実電荷 (真電荷) による電流と電荷密度がある。これは一般には、ρ と $\boldsymbol{j}$ と書かれる。ミクロ的な立場の Maxwell の方程式 (9) の ρ と $\boldsymbol{j}$ には、電気分極や磁気分極の電荷密度や電流が含まれるが、以降のマクロ的な立場では、それらは実電荷のみが担う。

マクロ的な立場で、電気分極や磁気分極による電荷や電流を区別して書いた Maxwell の方程式は、

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \cdot \boldsymbol{P}) \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{M}) + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{11}$$

となる。これは、式 (9) の電荷密度や電流の項を、電気分極、磁気分極、実電荷によるものに分けたのである。これが、物質中でのマクロな Maxwell の方程式である。しかし、この式は複雑であまり見通しがよくない。そこで、ミクロな式 (9) に似た式に変形することを考える。式 (11) を変形すると

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times (\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})}{\partial t} \end{cases} \tag{12}$$

が得られる。ここで、新たに

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \end{cases} \tag{13}$$

を定義する。この $\boldsymbol{D}$ を電束密度 [C/m^2]、$\boldsymbol{H}$ を磁界の強さ [A/m] と言う。これらを使うと、物質中の Maxwell の方程式は、

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{14}$$

となる。このままでは、4 つのベクトルが未知数であるため、通常は解けない。物質中では、

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{cases} \tag{15}$$

という関係がある。この比例定数 ε を物質中の誘電率、μ を物質中の透磁率という。これは、$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{E}$ に比例する、$\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{B}$ に比例することから、導くことができる。電場や磁場が弱いときには、比例するが、大きくなると比例しなくなる。そのため、ε や μ を定数として扱うのは近似に過ぎない。

そこで、式 (14) がいつでも成り立つためには、ε や μ を定数として取り扱わないようにすればよい。磁場や電場の強さの関数であるし、もはや実数として取り扱わない、スカラーではなく行列 (テンソル)、あるいはヒステリシスも考慮に入れ、取り扱う範囲を広げることができる。そのようにして、ε や μ は物質中の電磁気的な作用を記述している。

最後に、導体中の電磁場を計算する場合は、オームの法則を

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{16}$$

を加えればよい。ここの σ は、物質中の導電率である。

駆け足でしたが、物質中の Maxwell の方程式は終わり。

4　まとめ

電磁気学で重要な式は、以下の通りである。まずは Maxwell の方程式で

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}
\end{cases}
\tag{17}
$$

がある。次に、物質の性質を示す

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}
\end{cases}
\tag{18}
$$

がある。最後に、電荷 q が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているときに作用する電磁場が起源となる力は、ローレンツ力と呼ばれ

$$
\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{19}
$$

と書ける。