練習問題の解答

山本昌志*

2004 年 7 月 16 日

1 真空中の静磁場

問題 4.1

[問] 1 本の直線電流のまわりの磁場を、例題ではベクトルポテンシャルを直接計算することによって求めた。別解として、一本の直線上に一様な線密度で電荷が分布しているときの、電位の計算と対比させることによっても、いまの磁場が求められることをしめせ。

電場のスカラーポテンシャルが満たす微分方程式は、

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1}$$

である。一方、磁場のベクトルポテンシャルの場合は

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \end{cases} \tag{2}$$

である。スカラーポテンシャルもベクトルポテンシャルも同じ微分方程式である。微分方程式が同じならば、その解も同じ形である。

まずは、単純なスカラーポテンシャルを計算する。線密度 σ で電荷が一様に分布している無限に長い線を考える。ガウスの法則を使うと、電場は

$$E_r = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon r} \tag{3}$$

となる。次にポテンシャルを計算する。この場合、無限の電荷があるので、無限遠点を基準電位にできな

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

い。r_0 の位置を基準電位とする。すると、ポテンシャルは

$$\begin{aligned}\phi(r) &= -\int_{r_0}^{r} E_r dr \\ &= -\int_{r_0}^{r} \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon r} dr \\ &= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}\left(\log r_0 - \log r\right) \\ &= constant - \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}\log r\end{aligned} \tag{4}$$

である。微分方程式が同じなので、この結果は直ちにベクトルポテンシャルに応用できる。その結果、

$$\boldsymbol{A} = constant - \frac{\mu_0 \boldsymbol{I}}{2\pi}\log r \tag{5}$$

となる。これが、無限に長い直線電流の磁場を表すことは、各自確かめよ。

問題 4.2

[問]　次のベクトルポテンシャルは、同一の磁場を表している。その磁場の磁束密度を求めよ。次に、一つの磁場を表すのに、このような複数のベクトルポテンシャルがあってもよい理由を述べよ。

$$\boldsymbol{A} = (0,\, Bx,\, 0) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A} = (-By/2,\, Bx/2,\, 0) \tag{7}$$

まず、それぞれのベクトルポテンシャルが表す磁場を考えてみる。ベクトルポテンシャルと磁場の関係は、$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ なので、式 (6) の表す磁場は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla \times (0,\, Bx,\, 0) \\ &= (0,\, 0,\, B)\end{aligned} \tag{8}$$

となる。同様に、式 (7) の表す磁場は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla \times \left(-\frac{By}{2},\, \frac{Bx}{2},\, 0\right) \\ &= (0,\, 0,\, B)\end{aligned} \tag{9}$$

となる。これら 2 つのベクトルポテンシャルは、同じ磁場 $(0, 0, B)$ を表している。

なぜ、ベクトルポテンシャルは異なっているのに、同じ磁場となるのか?。これは、ベクトル恒等式

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla\phi) \tag{10}$$

から説明できる。即ち、異なるベクトルポテンシャル、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\phi$、であっても、同じ磁場を表すことができるのである。これは、ちょうど、通常の関数に定数項を加えても、その微分は同じであることに対応する。

それでは、$\boldsymbol{A} = (0,\, Bx,\, 0)$、$\boldsymbol{A}' = (-By/2,\, Bx/2,\, 0)$ として、その関係を調べてみる。それぞれの差は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A} &= \left(-\frac{By}{2},\, -\frac{Bx}{2},\, 0\right) \\ &= \nabla\left(-\frac{Bxy}{2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

である。したがって、$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\left(-Bxy/2\right)$ となっており、ベクトル恒等式より同じ磁場を表すことになる。

問題に対する解答は、これで終わりであるが、もう少し違った見方で、この問題を見てみる。式 (6) のベクトルポテンシャルと磁場の様子を図 1 に示す。この図の矢印がベクトルポテンシャルで、磁場は紙面に垂直にある。式 (7) の図 3 のようになる。これは、式 (8) や (8) の通りである。図を見れば、矢印が川の流れを表すとすると、紙面に垂直な軸をもつ水車を入れるとそれが回ることが分かるであろう。その回転速度もどこでも同じであることが直感で理解できると思う。

次に、図 1 を 90 度回転させてみよう。すると、図 2 のようになるであろう。90 度回転させても磁場はまったく変化しないが、ベクトルポテンシャルの方向は変化する。この 90 度回転したベクトルポテンシャル

$$\boldsymbol{A} = (-By,\, 0,\, 0) \tag{12}$$

もまた、同じ磁場を表すことが予想できる。実際、これが現す磁場を回転を取ると、$\boldsymbol{B} = (0,\, 0,\, B)$ となる。

図 3 のベクトルポテンシャルは、図 1 と 2 を加算して、2 で割った形になっている。それぞれのベクトルポテンシャルを、$\boldsymbol{A}_1,\, \boldsymbol{A}_2,\, \boldsymbol{A}_3$ とすると、

$$\boldsymbol{A}_3 = \frac{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2}{2} \tag{13}$$

である。これから、図 3 の磁場 $\boldsymbol{B}_3$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_3 &= \nabla \times \boldsymbol{A}_3 \\ &= \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{A}_1 + \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{A}_2 \\ &= \frac{1}{2}(0,\, 0,\, B) + \frac{1}{2}(0,\, 0,\, B) \\ &= (0,\, 0,\, B) \end{aligned} \tag{14}$$

となることが理解できるであろう。問題で与えられたベクトルポテンシャル図 3 は、図 1 と 90 度回転した図 2 を足して 2 で割っただけである。図 1 と 2 が 0.5 ずつ寄与しているのである。

このことから、図 1 の寄与が 1/4 で図 2 が 3/4 のような、図の場合でも同じ磁場を表す。また、それを 45 度回転させても同じ磁場を表す。

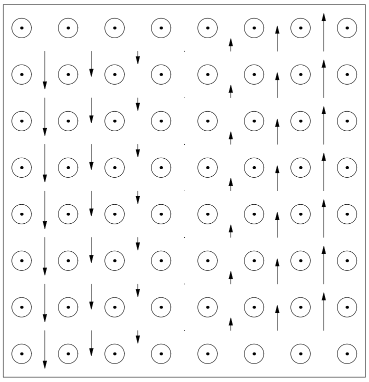

図 1: $\boldsymbol{A}=(0,\, Bx,\, 0)$

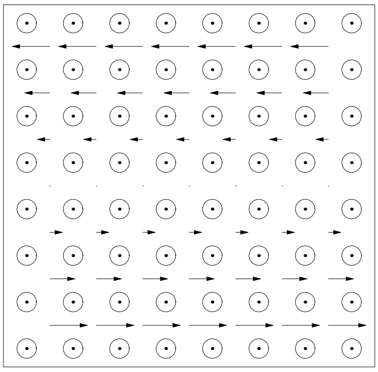

図 2: $\boldsymbol{A}=(-By,\, 0,\, 0)$

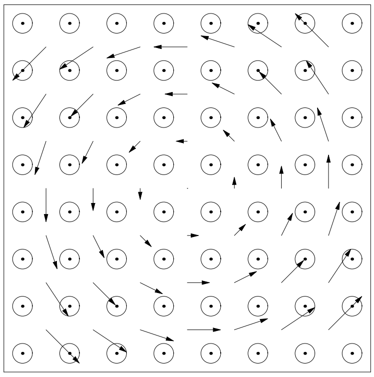

図 3: $\boldsymbol{A}=(-By/2,\, Bx/2,\, 0)$

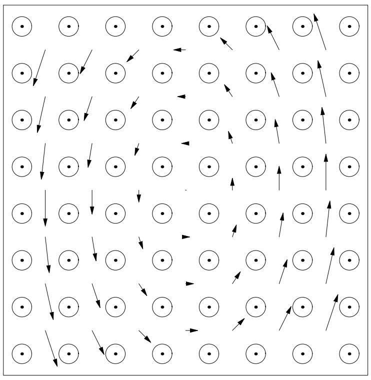

図 4: 1/4× 図 1+3/4× 図 2。

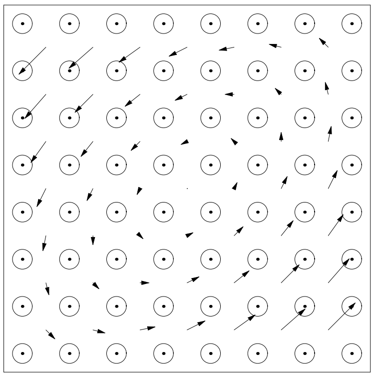

図 5: 図 4 を 45 度回転。

問題 4.3

[問] 半径 a の二つの円形コイルを中心軸を共通にして、a だけの間隔を隔てて置き、両者に同じ向きに同じ電流を流すと、二つのコイルの中心付近ではかなり一様な磁場を作れる。磁場の一様性を調べよ (このようなコイルをヘルムホルツ・コイルとよぶ)

問題のコイルの 1 個が軸上に作る磁場 B は、対称性により、軸上磁場は軸の方向に向いているはずである。その様子を図 6 の左の絵で示す。このコイルの小さい電流要素 δI が作る磁場は、ビオ- サバールの法則

$$\delta\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta\boldsymbol{I}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{15}$$

から計算できる。これから、その磁場は図 6 の右の絵のようになる。軸上の磁場 $\boldsymbol{B}$ は、微小電流 $\delta\boldsymbol{I}$ がつくる微小磁場 $\delta\boldsymbol{B}$ をコイルの一周にわたって、足し合わせれば良い。

図から分かるように、微小磁場 $\delta\boldsymbol{B}$ は軸の垂直成分もある。しかし、これは、コイル 1 週にわたって足し合わせると、ゼロになる。コイル 1 周にわたって合計すると、残るのは軸上の成分のみである。コイルの軸上の成分は、

$$
\begin{aligned}
\delta B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta\boldsymbol{I}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} \\
&\qquad \hat{\boldsymbol{z}}\text{ は、軸方向の単位ベクトル} \\
&\qquad \delta\boldsymbol{I}\text{ と }\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\text{ は直交しているので} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta I|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\cos\alpha \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta I}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\cos\alpha \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta I}{z^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{a\delta I}{(z^2+a^2)^{3/2}} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる。これをコイルの全ての電流で積分することになるが、$\delta I = a\delta\theta$ を利用すると計算が楽である。磁場は

$$
\begin{aligned}
B_z &= \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{a^2 I d\theta}{(z^2+a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{(z^2+a^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

となる。これで準備ができた。あとは、ヘルムホルツコイルになるように、座標を設定するだけである。

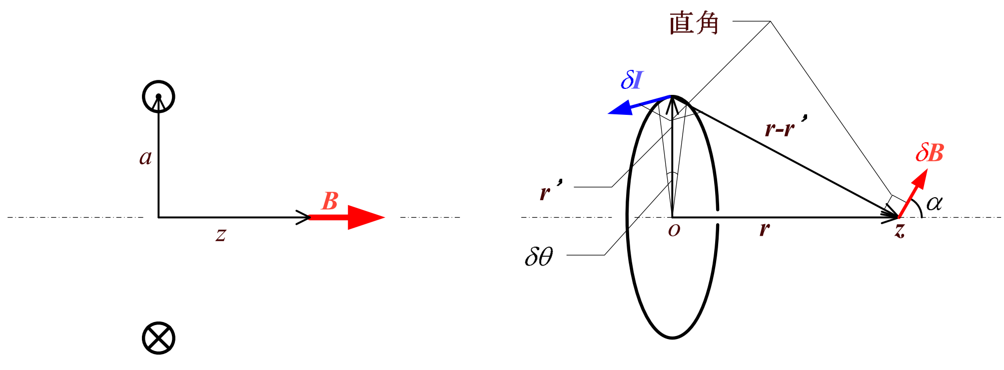

図 6: コイルが作る磁場

ヘルムホルツコイルは、図 7 のような構成になっている。この 2 つのコイルの中心を $z = 0$ とする。こ

の場合、左右のそれぞれのコイルが作る磁場は、式 (17) を用いると、

$$B_z^{left}(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{[(z+\frac{a}{2})^2+a^2]^{3/2}} \qquad \text{左のコイル} \tag{18}$$

$$B_z^{right}(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{[(z-\frac{a}{2})^2+a^2]^{3/2}} \qquad \text{右のコイル} \tag{19}$$

と計算できる。z 座標をシフトさせただけである。それぞれのコイルが作る磁場とそれを合計ヘルムホルツコイルの磁場を図 8 に示す。ヘルムホルツコイルの磁場は、中心付近でかなり一様性が良いことが分かる。これがヘルムホルツコイルの特徴である。

次に $z=0$ 付近の磁場の一様性を調べる。そのために、それぞれのコイルが作る磁場について、$z=0$ の周りでテイラー展開する。展開の結果は

$$B_z^{left}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2}\left[\frac{8}{5\sqrt{5}a^3} - \frac{48}{25\sqrt{5}a^4}z + \frac{256}{125\sqrt{5}a^6}z^3 - \frac{1152}{625\sqrt{5}a^7}z^4 - \frac{5376}{15625\sqrt{5}a^8}z^5 + O(z^6)\right] \tag{20}$$

$$B_z^{right}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2}\left[\frac{8}{5\sqrt{5}a^3} + \frac{48}{25\sqrt{5}a^4}z - \frac{256}{125\sqrt{5}a^6}z^3 - \frac{1152}{625\sqrt{5}a^7}z^4 + \frac{5376}{15625\sqrt{5}a^8}z^5 + O(z^6)\right] \tag{21}$$

となる。これから、これら 2 つのコイルの和であるヘルムホルツコイルの磁場は

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2}\left[\frac{16}{5\sqrt{5}a^3} - \frac{2304}{625\sqrt{5}a^7}z^4 + O(z^6)\right] \tag{22}$$

となる。要するに、ヘルムホルツコイルの中心付近では、

- それぞれのコイルの 1 次の成分はない。
- 2 次と 3 次の成分は、それぞれのコイルでキャンセルされる。

と言うことである。このことから、ヘルムホルツコイルの中心付近の磁場は、4 次の成分まで一様である。

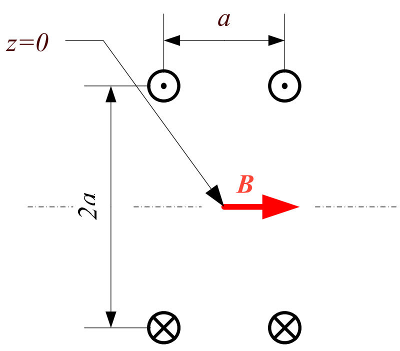

図 7: ヘルムホルツコイルの構成。図 8 では、$a=0.5$ で計算。

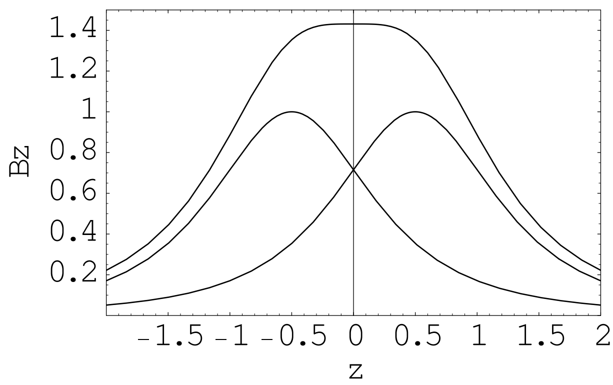

図 8: ヘルムホルツコイルの各々コイルの磁場と、それを合成した磁場。