真空中の静磁場 (その 2)

山本昌志*

2004 年 6 月 25 日

1　ベクトルポテンシャル

1.1　復習 (静電場のスカラーポテンシャル)

静電場のときに話したポテンシャル[1] ϕ は、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{1}$$

と決めた。これは、$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ が成り立つため、スカラー場 ϕ を使うことができた。今までの学習してきた言葉で言えば、電圧の変化の割合が電場である。このポテンシャルは、位置 $\boldsymbol{r}$ のみの関数で、座標が決まれば、値が決まる。これは、山の高さみたいなもので、地図の上で経度 (x 座標) と緯度 (y 座標) を決めれば山の高さ (h) が求まるのと同じである。その山の勾配が $\nabla\phi$ である。$\delta\boldsymbol{r}$ 移動したときの、山の高さの変化 δh は

$$\delta h = \nabla h \cdot d\boldsymbol{r} \tag{2}$$

と書けるだろう。したがって、微分の規則から、勾配の演算は

$$\nabla h = (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}) \tag{3}$$

となる。

山のをうろうろして、元の場所に戻ると、その位置エネルギー[2](mgh) の変化はない。これは、山の高さ (ポテンシャル)、あるいは位置エネルギーが座標 $\boldsymbol{r}$ のみの関数であるからである。このような場から、導かれる場を保存力と言う。万有引力、重力、弾性力、静電力などがその例である。ポテンシャルエネルギーを $u(\boldsymbol{r})$ とすると、保存力 $\boldsymbol{F}$ とは

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{4}$$

の関係がある。そして、物体が点 $\boldsymbol{r}_1$ から $\boldsymbol{r}_2$ に移動する場合、この保存力がする仕事は、$U(\boldsymbol{r}_1) - U(\boldsymbol{r}_2)$ となる。途中の道筋によらない。

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻
[1] 電気の世界では、電圧と言う。
[2] 一般には、保存力場のエネルギーをポテンシャルエネルギーと言う。

静電場の多くの問題は、電荷密度が与えれている場合、電場分布を求めることになる。この場合、このポテンシャルは非常に便利である。通常の問題であれば、直接電場を求めるよりは、ポテンシャルを求めてから、それの勾配を計算することにより電場を導くのが簡単である。具体的には、ポアッソン方程式

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{5}$$

を解くか、その解である

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}dv' \tag{6}$$

の積分を計算するかである。問題に応じて、使い分ければよい。

1.2 静磁場のベクトルポテンシャル

静電場の場合、ポテンシャルの考え方は非常に強力である。同じようなテクニックが静磁場の計算に使えれば便利である。静電場の場合、$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ と式から、スカラーポテンシャル ϕ と言うものを使うことにした。不幸なことに、静磁場の場合 $\nabla\times\boldsymbol{B}\neq 0$ なので、静電場のようにはいかない。静磁場の場合、

$$\nabla\cdot B = 0 \tag{7}$$

を使うことになる。発散がゼロなので、$\boldsymbol{B}$ は何かの回転と書くことができる。要するに、

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{8}$$

である。これを、式 (7) に代入すると、$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$ で、確かに良い。この $\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルと言う。

スカラーポテンシャルの場合、それに任意の定数を加えても、静電場は変わらなかった。そこで、計算が便利なように、$\phi(\infty)=0$ と基準ポテンシャル (基準電位) を決めた。ベクトルポテンシャルも、任意の定数を加えても、それが表現する磁場を同じである。ベクトルポテンシャルの場合、さらに任意性があり、任意のスカラー場 ψ の勾配を加えても、それが表現する磁場は同じである。すなわち、

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \nabla\times(\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\psi) \tag{9}$$

である。

このような場合、計算の都合の良いようにある条件を課して、パラメーターの自由度を減らしておくと良い。スカラーポテンシャルの場合、無限遠点で、値をゼロに決めたようにである。静磁場の計算では、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{10}$$

とするのが都合が良い。これを、クーロンゲージと言う。なぜこれが都合が良いかは後でわかる。ところで、磁場を変えないで、この条件を満たすことができるのだろうか?。A に任意のスカラー場の勾配を加えることが可能であることは、先に述べたとおりである。それでは、$\nabla\boldsymbol{A}\neq 0$ である $\boldsymbol{A}$ に任意のスカラー場を加えて、発散を計算してみる。これは、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A'} = \nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\psi) \tag{11}$$

となる。ψ は任意に選ぶことができるから、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A'} = 0 \tag{12}$$

とすることができる。なんとなく良いように思えるが、本当かなー、よくわからん。実際は、良いのであるが、ほかの方法を考える。

もう少し元に戻って、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は、式 (8) を満足すればよいだけである。$\boldsymbol{A}$ を決めるためには、その発散を決めればよい。その発散は、どんな値をもとりうる。したがって、$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ としても良いはずである。以上のことをまとめると、ベクトルポテンシャルは

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{14}$$

の 2 つの方程式から決めることができる。

1.3 ベクトルポテンシャルの例

実際、ベクトルポテンシャルはどのような形をしているか、考えよう。この辺は、「ファインマン物理学 III 電磁気学」を参考にしている。

z 方向に一様な磁場 B_0 の場合を考える。ベクトルポテンシャルの定義より、

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial a} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

となる。この式から、可能な解は、

$$A_x = 0 \qquad A_y = xB_0 \qquad A_z = 0 \tag{16}$$

がある。この解は明らかに、$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ である。同じように、もうひとつ、

$$A_x = -yB_0 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0 \tag{17}$$

の解があることも直ちに解る。これも、発散はゼロである。また、これらの解を組み合わせて

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0 \qquad A_y = \frac{1}{2}xB_0 \qquad A_z = 0 \tag{18}$$

という解もできる。いずれにしても、いろいろなベクトルポテンシャルがあり、どれも同じ磁場を表す。

以前の授業で、ベクトル場の発散と回転が決まれば、そのベクトル場は一意に決まるといった。それにもかかわらず、ここでは少なくとも 3 つのベクトルポテンシャルが可能なのはなぜか?。よく考えてみよう。

1.4　電流の作るベクトルポテンシャル

先週の授業でやったアンペールの法則

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I \tag{19}$$

の微分形は

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{20}$$

である。これらは、ストークスの定理で結ばれていることを十分理解する必要がある。この微分形を用いて、電流密度分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が作るベクトルポテンシャルを計算する。これは、電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ がスカラーポテンシャルを作ったのと同じである。

式 (20) にベクトルポテンシャルを代入すると、

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A} &= \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A}\\ &= -\nabla^2\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{21}$$

なので、

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j} \tag{22}$$

となる。これは、ベクトルの微分方程式である。それぞれの成分は、

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \qquad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \qquad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \tag{23}$$

となる。

これは、静電場の場合のスカラーポテンシャルの式

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{24}$$

とそっくりではないか。この方程式の解、つまり図 1 の点 P でのポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv' \tag{25}$$

となることは以前に学習したとおりである。ベクトルポテンシャルの各成分の式はスカラーポテンシャルとまったく同じ形をしているので、解も同じ形である。各成分で書き表すのは面倒くさいので、ベクトルで書くと

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv' \tag{26}$$

となる。電流分布が与えられたとき、この積分を行い、その結果の回転を計算することにより磁場を求めることができる。

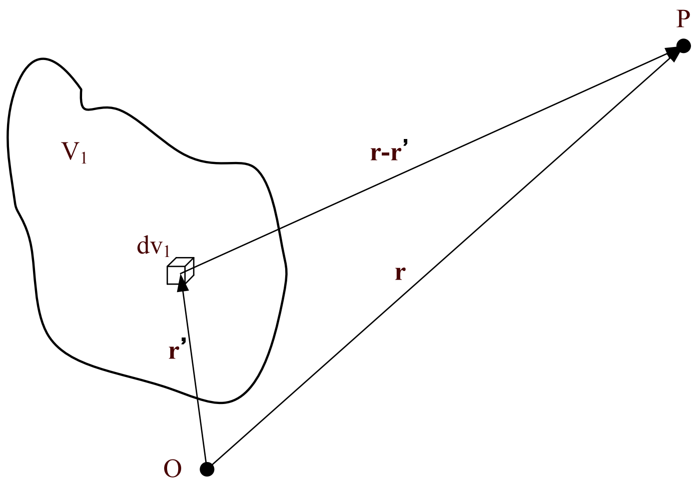

図 1: 静電磁場の計算

2　ビオ-サバールの法則

次に、式 (26) の回転を計算することにより、磁場を求めてみる。当然、点 P の回転を求めるため、演算子は

$$\nabla = \left(\frac{1}{\partial x}, \frac{1}{\partial y}, \frac{1}{\partial z} \right) \tag{27}$$

となる。$\boldsymbol{r}'$ での微分ではない。

ベクトル解析の恒等式

$$\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \times \boldsymbol{A} + f(\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{28}$$

と、

$$\nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) = -\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{29}$$

に注意して、計算を進める。

磁場は、式 (26) の回転を計算することにより、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) dv' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') + \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \nabla \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') dv' \\
&\quad \text{式 (29) と } \nabla \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = 0 \text{ より} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') dv' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dv'
\end{aligned} \tag{30}$$

となる。この電流と磁場の関係を「ビオ-サバールの法則」と言う。これは、静電場を求める式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dv' \tag{31}$$

と同じ形であることに注意してほしい。

「ビオ-サバールの法則」についての、残りの説明は、教科書の通り。

3　磁場のエネルギー

本当は、ここで磁場のエネルギーについての説明が必要であるが、良い説明が思い浮かばなかった。これについては、後の講義で説明する。