真空中の静磁場 (その 1)

山本昌志*

2004 年 6 月 18 日

1　電流と磁場の関係の歴史

最初に磁石による力、磁力を発見したのは誰かは分からないが、その解析的な研究の先鞭をつけたのは、コペンハーゲン大学のエルステッド教授 (Hans Christian Oersted, 1777-1851) であろう。彼は、1819 年から 1920 の冬に、電気学や磁気学の講義をしていた。当時、電流と電荷の間には何か関係があると考えていた人がいた。どちらも、触るとビリッとするからである。なんとも、頼りない理由ではあるが、そう考えたのは偉い。ただ、エルステットの方は、少し変わっていて、電流と磁石になんらか関係があると考えたようである。

どのようにして、この考えに至ったかは分からないが、電流を流すと方位磁石は力を受けて、方向が変わると考えた。磁石は力を受けて、電流と同じ方向、あるいは反対の方向に向くと考えた。これはもっともなことで、電線に流れている電流が、磁石の北の先端が受ける力は、対称性から考えて、右や左であるわけがない。電流と同じ方向か、その反対である。そこで、学生の前で、図 1 のように、磁石と電線を配置して、スイッチを入れた。結果は、期待に反して、磁石は動かなかったのである。これは、磁石の方向と電流が作る磁場の方向が一致していたために動かなかったのである。ここで、電流を反対にすれば、磁石が 180 度回転して、それはドラマチックなことが起きたはずであるが、なぜかエルステットは、反対に電流を流していない。それにしても、1/2 の確率でエルステットは運がなかった。

しばらく、自分の考えがうまくいかないことに、悶々としていたエルステットは、何を思ったか、あるいは実験を間違えたか、磁石と電線を同じ方向に向けて、電流を流した。そうすると、磁石が 90 度回ったのである。これには、エルステットも驚いたに違いない。対称性から考えて、どうしてもありえないことが起こったのである[1]。1820 年の春のことである。エルステットはなかなか納得がいかなかったが、実験を繰り返し、その事実を認めた。そして、その発見について、その年の 7 月に報告書を書いた。

この報告書が他の研究所に届くや否や、多くの実験が行われ、新たな発見が相次いだ。

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

[1] この現象は、実際には対称性が破れてはいない

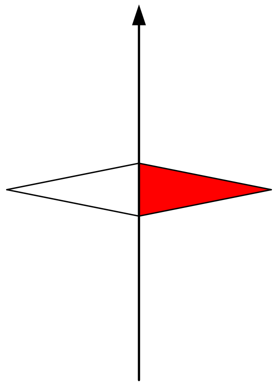

図 1: 東西に電線を張る

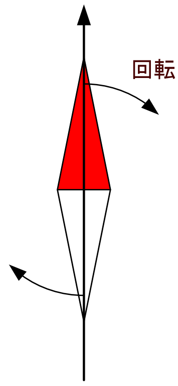

図 2: 電線を南北に張る

2　電流間に働く力と磁場

2.1　磁場

1 本の直線電流 I のつくる磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}}{R^2} \tag{1}$$

となる。この式から、半径 r_0 での線積分は

$$\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{B}\cdot d\ell &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}}{R^2}\cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&\quad \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}\text{ と }\ell\text{ は同じ方向なので} \\
&= \oint \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}d\ell \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r_0}r_0 d\theta \\
&= \mu_0 I
\end{aligned} \tag{2}$$

となる。この結果は、磁場が直線電流からの距離の $1/R$ に比例することから、容易に予想できる結果である。重要なことは、直線電流からある距離離れた磁場の線積分は、距離に依存しないことである。

これは、ガウスの法則、点電荷の作る電場の面積分が、距離に依存しないのと同じである。この場合も、最初、球の中心に点電荷を置き、一般的に閉じた面で成り立つことを示した。同じことを、ここでも行う。教科書の方法を詳しく説明する。積分路を変形させると、$\delta\boldsymbol{\ell} = \delta\boldsymbol{t} + \delta\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{z}$ と書くことができる。磁場の方向、すなわち $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}$ の方向は、δt に平行で、δr と δz には垂直となる。したがって、積分は先ほどと同

じで、

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\ell &= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{R}}{R^2} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&= \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\theta \\
&= \mu_0 I
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となる。閉じた線路での積分はいつも同じ値になる。今までは、1 本の直線電流であったが、磁場は重ねあわせができるので、複数本でも成り立つ。あるいは、電流がデルタ関数のように離散的ではなく、連続的な分布で、ある密度 ($\boldsymbol{j}$) として存在する場合も成り立つ。これらは、磁場が重ね合わせの原理が成り立つからである。したがって、

$$
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \mu_0 \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{4}
$$

となる。右辺は、線積分を囲む電流の総和になっていることに注意が必要である。

ところで、この積分の外側の電流の寄与はどうなるのであろうか?。外側の電流であろうとも、この積分路には磁場を発生させる。結論を先に言うと、

- 外側の電流による磁場はあるが、積分を行うとゼロになる。

である。このことは、電荷でやったのと同じことを行えばよい。

2.2 磁場の回転

式 (4) の積分範囲を十分小さくすれば、その微分の法則が得られる。面積分の面の法線方向は電流の方向として、その範囲を非常に小さくすると、式 (4) は

$$
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 j a \tag{5}
$$

となる。a が積分範囲の面積である。これの極限と取る操作をすると、

$$
\lim_{a \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{a} = \mu_0 j \tag{6}
$$

となる。この式の左辺は、回転の定義であるので、

$$
\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{7}
$$

と書き改めることができる。スカラーの式がベクトルになったことは、少しカンベンしてほしい。ちゃんとすれば、これらの曖昧さもなくなるはず。

あるいは、式 (4) をストークスの定理を用いて、

$$
\begin{aligned}
\int_S \mu_0 \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&= \int_S \nabla \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS
\end{aligned}
\tag{8}
$$

と変形する。これから、式 (7) を導くことができる。

これで、磁場の回転が求まったわけである。安心するのはまだ早い。磁場を決めの式は、もうひとつ必要である[2]。磁場の発散を求めなくてはならない。

2.3 磁場の発散

今まで、考えてきた、1 本の長い電線が作る磁場を考えよう。磁場は、電線の周りに回転としてできる。このような場合、どのような微小の体積を考えても、その発散はゼロである。要するに、どんな部分をとっても、入ってくる磁場のフラックスと出て行くフラックスは等しい。これは、たとえ、電線を取り囲んだ体積を考えても、そうなる。

電場の場合は、電荷から電気力線が出ていて、どこか無限遠点に行くか、反対の電荷に吸収されていた。磁場の場合、磁力線は閉じた線である。このことが正しいとすると、磁場の発散

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9}$$

となる。いままで、この式に反する観測結果は得られていない。したがって、この磁場に関する発散の式は正しいとする。この式は、電荷に相当する磁荷は無いと言っている。

これで、磁場に関する回転と発散の式が得られたので、磁場を計算することができるようになった。とりあえず、めでたい。

3 ローレンツ力

エルステットの磁場に関する発見を定量的に述べるためには、磁場と言うものを定義しなくてはならない。最初の方の授業で述べたように、無限に長い平行に張られた電線に電流を流すと、それらには

$$\delta F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R}\delta\ell \tag{10}$$

のような力が加わる (教科書の式 (1.7))。これから、電流を定義する。そして、電流 I_1 が作る磁場は、そこに流れる電流 I_2 に生じる力

$$F = BI_2 \tag{11}$$

と定義する。すると、磁場は

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} \tag{12}$$

となる。これをベクトルで書くと、式 (1) のようになる。これから、あるいはビオ-サバールの法則から、磁場を定義できる。

これとは別に、磁場を荷電粒子が運動するときの力、

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{13}$$

から定義できる。この力をローレンツ力と言う。これが、磁場の定義なのか、実験結果なのか、はたまたなんなのかは意見の分かれるところではあるが、以下の事実は変わりない。

[2]もうひとつ必要な理由を忘れた人は、教科書 p.24〜をもう一度読め

- クーロンの法則と特殊相対性理論から、この式を導くことは可能である。

電場をローレンツ変換すると、磁場の項がでるのである。この辺の詳しい話は、省略する。

この後のアンペールの力とローレンツ力のパラドックスは、教科書の通り。教科書に基づいて説明する。