真空中の静電場 (その 2)

山本昌志*

2004 年 6 月 11 日

1 電荷分布と電場

1.1 電場の求め方

電荷分布が与えられたときに電場を求める方法は、今まで学習した 3 つの方法

- 電場の重ね合わせを使う方法
- ガウスの定理を使う方法
- スカラーポテンシャルを微分する方法

がある。復習を兼ねて、それぞれの方法について説明しておく。静電場の問題を一般化すると、図 1 のようになる。体積 V の中に、電荷が密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ で分布している場合、位置 $\boldsymbol{r}$ での電場 $E(\boldsymbol{r})$ を求めるのである。

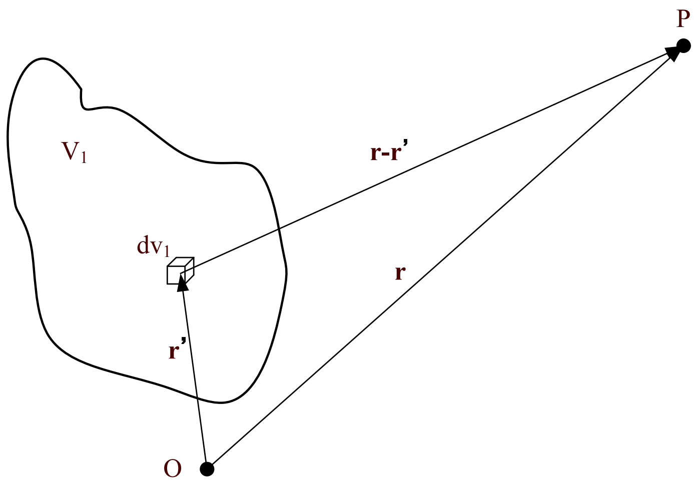

図 1: 電場の計算

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

1.1.1　電場の重ね合わせ

最初の方法は、クーロンの法則をそのまま適用して、電場を計算することである。これは、最も原始的で最も効率の悪い方法であるので、通常は使われない。

クーロンの法則

$$\boldsymbol{F} = \frac{Qq(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}|^3} \tag{1}$$

と電場の定義式

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2}$$

から、離散的な電荷 Q の場合、電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{3}$$

である。これを連続的電荷分布 ρ、すなわち電荷密度に置き換えた場合、

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dv' \tag{4}$$

となる。このベクトルの式を、成分で書き表すと、

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(x-x')}{[(x-x'^2+(y-y'^2+(z-z'^2)]^{3/2}}dx'dy'dz' \\ E_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(y-y')}{[(x-x'^2+(y-y'^2+(z-z'^2)]^{3/2}}dx'dy'dz' \\ E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(z-z')}{[(x-x'^2+(y-y'^2+(z-z'^2)]^{3/2}}dx'dy'dz' \end{cases} \tag{5}$$

となる。もちろん、$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ という関係を用いている。この式 (5) を使えば、電荷密度分布が分かっていれば、どんな静電場の問題でも解けるといえる。しかし、実際に積分が面倒なので、ほとんどの場合、この式を使うことは無い。通常、このような積分はうんざりするほどの手間がかかり、コンピューターでないと計算できないであろう。

クーロンの法則を直接使って計算するような問題は、次のようなものがある。

問　距離 ℓ 離れて、2 つの電荷 $+Q$ と $-Q$ が存在する。その 2 つの電荷の直線上での電場を求めよ。

1.1.2　ガウスの法則

先週の授業でやったように、クーロンの法則から、ベクトル解析の知識を使うとガウスの法則

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho dV \qquad \text{積分形} \tag{6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \text{微分形} \tag{7}$$

を導くことができる。実際に、電場を計算する場合、この積分系を使うことが多い。

例えば、次のような単純な例を解く場合である。この単純な例ですら、クーロンの法則を直接適用して、計算できないことが分かる。対称性の良い問題の場合は、ガウスの法則は強力である。

問 半径 a の球の中に、電荷密度 ρ で電荷が一様に分布している。球の内外での電場を求めよ。

1.1.3 スカラーポテンシャル (電圧)

3 つめの方法は、スカラーポテンシャルを求めて、それを微分することにより電場を計算する方法である。この方法が、最も汎用的で、複雑な問題を解く場合、一般的に用いられる。

先週、示したようにスカラーポテンシャルは、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{8}$$

と定義される。このスカラーポテンシャルが満たす方程式は、この式を微分形のガウスの法則に放り込めば導くことができる。これは、ポアソン方程式

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{9}$$

と呼ばれる、偏微分方程式である。今までの、クーロンの法則やガウスの法則から電場を計算する場合、ベクトルの演算が必要で大変であった。しかし、このポアソン方程式は、スカラーなので、計算量が減り楽である。ただし、電場を求める場合、このスカラーポテンシャルの微分が必要ではある。

先週述べたように、このポアソン方程式の一般解は、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dv' \tag{10}$$

である。微分方程式 (9)、あるいは積分の式 (10) を計算して、スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求める。そして、電場は、それを微分すれば求められる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \tag{11}$$

次のような問題に、このスカラーポテンシャルを適用できる。

問 半径 a の円板に面密度 σ で電荷が一様に分布しているとき、円板の中心軸にそって、円板の中心から x の距離での電場を求めよ。

2 多重極子展開

教科書の p.36〜41 には、多重極子展開のことが述べられている。これは、興味深い話であるし、ある種の問題を解くときに、非常に重要なテクニックとなる。少しだけ難しいことと、後の学習には直接かかわらないので、本講義では述べないことにする。興味の在る学生は、自分で学習してください。不明なことがあれば私の研究室に質問にきてください。

3 静電場のエネルギー

原理的には、クーロンの法則が静電気学の全てである。過不足なく、この法則だけで、静電気に関するすべての物理的な現象が説明できる。この法則は、力と電荷の関係を述べているにすぎない。ここで新しい概

念、エネルギーと言うものを導入する。これは、力学におけるニュートンの運動の法則

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{12}$$

に加えて、エネルギーの概念を導入することと似ている。古典力学の現象は全て、ニュートンの運動の法則から説明できるが、エネルギーの概念を導入することで、問題の洞察力を飛躍的に増大できる。エネルギーの概念を全く使わないで、古典力学の問題を解くような人はいないであろう。同じように、静電場にもエネルギーの概念を導入する。

まずはじめに、無限に離れた 2 つの電荷 Q_1Q_2 を、距離 r の間隔になるように配置する場合の仕事 W を考える。この系にする仕事は、$W =$ 力 $\times$ 距離 である。したがって、電荷 Q_1 を固定して、Q_2 を無限遠点から、距離 r_0 まで近づけるために、外部の何かがする仕事は、

$$\begin{aligned}
W &= \int_{-\infty}^{r_0} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&= -\int_{-\infty}^{r_0} \frac{Q_1Q_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}\cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&\quad Q_1 \text{ を原点において、積分の経路に依存しないので} \\
&= -\int_{-\infty}^{r_0} \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}dr \\
&= \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon r_0}
\end{aligned} \tag{13}$$

である。外部の何かが、この電荷の配置を作るために、これだけの仕事をしたのである。すると、この 2 つの電荷の分布は、その仕事の分だけエネルギーを蓄えるはずである。これは、力学の問題のばねの問題とそっくりである。ばねの場合は、それが押し縮められたとき、ばねにエネルギーが蓄えられた。この問題も、両方の電荷の間に仮想的なばねがあり、それが押し縮められたと考えても良いのだろうか?。そのように考えても、差し支えは無い。ただ、ここではもうちょっと便利な方法を考える。以前、話したように場の考え方に立つことにする。この方が、将来複雑な問題を解く場合、圧倒的に有効である。

静電場のエネルギーを教科書の方法で説明する。これは、コンデンサーを用いた説明である。電極の面積 S で間隔 L のコンデンサーを考える。この場合、電極の一辺の長さは、電極間に比べて、十分大きいとする。これの両端に、$-Q$ と $+Q$ の電荷があるような状況について、計算する。この場合、コンデンサーの中の電場 $\boldsymbol{E}$ は、ガウスの法則の微分形

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{14}$$

より[1]、両辺を積分すると、

$$\begin{aligned}
\int \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV &= \int \frac{\rho}{\varepsilon}dV \\
\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}ds &= \frac{Q}{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{15}$$

となる。コンデンサー内部の電場は、ほぼ一様なので、

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon} \tag{16}$$

[1] この式とガウスの定理のみ憶えて、必要な式は導くようにする。

となる。驚いたことに、コンデンサー内部の電場の大きさは、電極間距離 L に無関係なのである。コンデンサーの外側では、電場がゼロであることにも留意して欲しい。

次に、このコンデンサーの負極から、正電荷 $+\delta Q$ だけ、正極に移動させた場合を考える。当然この $+\delta Q$ は微小量で、電場の大きさの変化は小さいとする。この場合、外部の何かが

$$W = EL\delta Q \tag{17}$$

の仕事をする必要がある。そうすると、コンデンサーの内部では

$$\begin{aligned}\delta U &= EL\delta Q \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0 S}L\delta Q\end{aligned} \tag{18}$$

のエネルギーが増えたはずである。したがって、もともと、電荷が無い状態から、両方の電極に $+Q$ と $-Q$ の電荷が蓄えられた状態になると、そこに蓄積されているエネルギー U は、

$$\begin{aligned}U &= \int_0^Q \frac{Q}{\varepsilon_0 S}LdQ \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}L \\ &= \frac{\varepsilon_0 SL}{2}\frac{Q^2}{(\varepsilon_0 S)^2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}SLE^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}dv\end{aligned} \tag{19}$$

となる。これは、密度 $\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}$ でエネルギーが存在すると解釈する。

最後の方はかなり、論理が飛躍しているが、結果は正しい。重要なことは、静電場のエネルギー密度は

$$\text{静電場のエネルギー密度} = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} \tag{20}$$

である。

- 式 (20) がエネルギー密度の次元になっていることを確かめよ。
- このエネルギーの式から、コンデンサーの重要な関係式 $U = 1/2CV^2$ を求めよ