

ニュートン法 (非線型連立方程式)

山本昌志*

2004年8月26日

1 概要

前回の授業では、ニュートン法による複素数の近似解を求める方法を示した。「非線型連立方程式」の近似解が求めれば、概ねニュートン法の学習は終わりである。ちょっと難しいが、ニュートン法の学習の仕上げとして、「非線型連立方程式」の実数解を求める方法をここでは学習する。非線型連立方程式の複素数解を求めることが残っているが、この講義では示さない。今までのことを理解していれば、その方法も直ぐに理解できるであろう。興味のある人、あるいは必要に迫られた人は、自分で計算方法を考えてみよう。

2 非線型連立方程式の実数解 (2元の場合)

2.1 非線型連立方程式とは

今まで、諸君は、「非線型の方程式」あるいは「線形の連立方程式」は解いたことがある。例えば、前者は、

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

のようなものである。後者の例は、

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ x + 2y + z = 11 \end{cases} \quad (2)$$

である。非線型方程式は未知数が2次以上のものをいい、連立方程式は未知数が2個以上のものをいうのである。非線型とは、直線でないという意味である。未知数が2次以上のもの、例えば x^3 が式に含まれると、それは直線にならないので、非線型方程式になる。直線でないという意味からも、 $\sin x$ も非線型方程式を形づくる。この場合、 x の次数は無限である。

非線型な n 次方程式は、複素数解を考えると、 n 個の解がある。線形な連立方程式、 n 元 1 次方程式の場合、係数が特異でない限り、1 個の解がある。では、非線形な連立方程式、 n 元 m 次方程式の場合、複素数を含めた解の数は m 個のように思えるが、正しいのだろうか?。数学の先生に聞くと、正しいということである。

* 国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

また、方程式の数と未知数の数は一致しなくてはならないのは、通常の連立方程式と同じである。それらの数が同じでも、線形連立方程式では、係数行列の行列式がゼロの場合、解は一意に決まらない。非線型の連立方程式の場合、これはどのような場合に対応するのだろうか？。私には、分からない。かなり難しく興味深い問題のように思えるが、ここではそのことは考えないことにする。

2.2 非線型連立方程式の例

実例を使って、計算方法を示す。例として

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \sin x + e^{y-1} - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

の近似解を求めることを考える。2元?次非線型連立方程式である。?次とは、いささかいい加減に書いているが、勘弁してもらいたい。無限次といってよいような気がするが自信が無いので?マークを付けておく。

さて、この方程式の解であるが、それをグラフに示す。2元であればグラフに書くことができるのである。以下の議論は、任意の元の方程式でも成り立つことは理解して欲しい。これらの方程式をグラフに書くと図??のようになる。図中に示すように、点AとBに実数解があるのが分かるであろう。

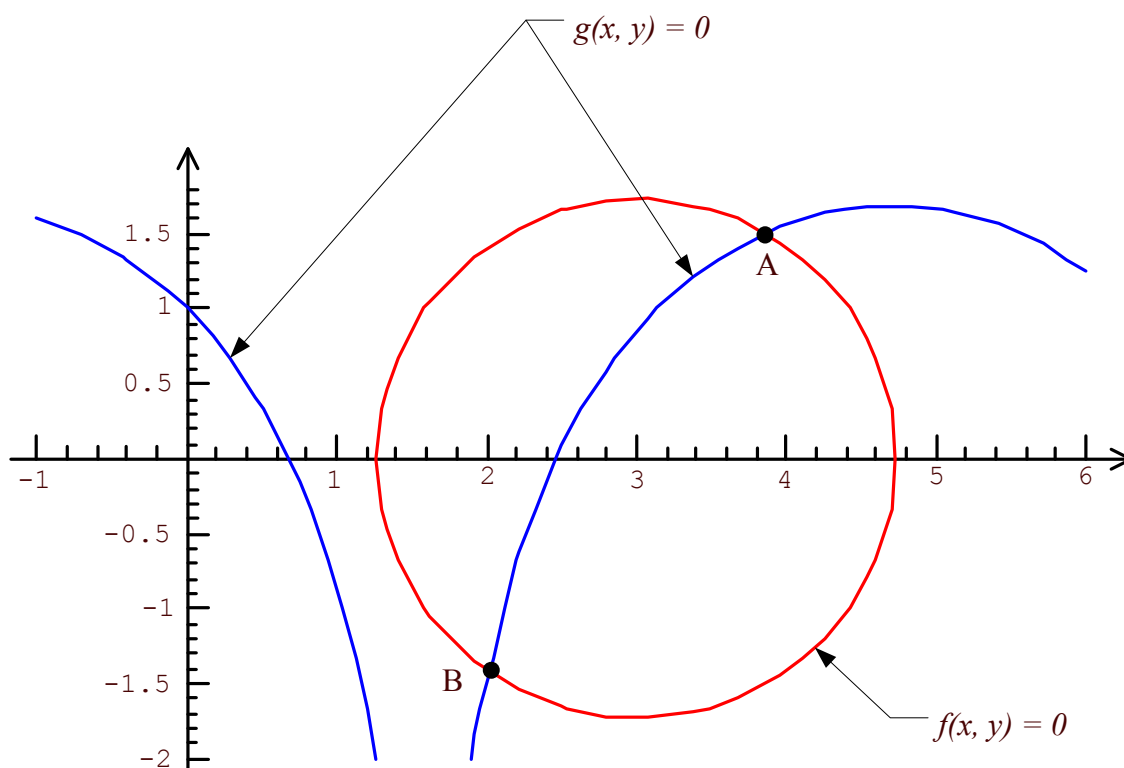


図 1: 非線型方程式のグラフと実数解

初期値から出発して、解である A や B 点に近づく方法を考える。そこで、次のような関数を考える。

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + y^2 - 3 \quad (4)$$

$$g(x, y) = \sin x + e^{y-1} - 1 \quad (5)$$

もちろん、 $f(x, y) = 0$ と $g(x, y) = 0$ が同時に成り立つ、 (x, y) をもとめたいわけである。

いつものように、この非線型連立方程式の解を (α_x, α_y) とする。当然、 $f(\alpha_x, \alpha_y) = 0$ かつ $g(\alpha_x, \alpha_y) = 0$ である。そして、 i 番目の近似解を (x_i, y_i) とする。ここから、 $(\Delta x, \Delta y)$ だけ移動したところの値は、

$$f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2)$$

ただし、 $(\Delta x, \Delta y)$ が小さい場合 (6)

$$\simeq f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

となる。 $g(x, y)$ の場合も全く同じである。それら、2 つをまとめ、 \simeq を $=$ に直すと

$$f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (7)$$

$$g(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = g(x_i, y_i) + \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y \quad (8)$$

となる。

ここで、 $f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = 0$ かつ $g(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = 0$ となるように、 Δx と Δy を選ぶとする。このようにするためには、 Δx と Δy はつぎの連立方程式を満たせばよい。式 (7) と (8) の左辺をゼロとおき式を整理すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_i, y_i) \\ -g(x_i, y_i) \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる。この連立方程式を解いて、 $(\Delta x, \Delta y)$ を求める。 $\alpha_x \simeq x_i + \Delta x$ したがって、 $\alpha_y \simeq y_i + \Delta y$ から、次の近似解は

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta x \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y \end{cases} \quad (10)$$

となる。これが、非線型連立方程式の漸化式である。

2.3 連立で無い場合とのアナロジー

以前の授業で示した方程式の実数解や複素数解を求めたのと同じようなことを、ここでも行った。式も似ているし、考え方も同じである。以前は、

- 解に近いところでは、直線で近似できる¹。

のような性質を利用した。2 元非線型連立方程式でも同じで、

¹ 解に近い必要はなく、狭い範囲は直線で近似できるということである。

- 解に近いところでは、平面で近似できる²。

という性質を利用している。この性質を定量的に表したものがテイラー展開である。なるほどテイラー展開は便利なものである。

3 非線型連立方程式の解 (多元の場合)

前章では、2 元非線型連立方程式のニュートン法での計算方法を示した。ここでは、それを一般化する。ここで示す方法は、複素数解にも適用できる。

N 元非線型連立方程式は、

$$\begin{cases} f_1(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N) = 0 \\ f_2(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N) = 0 \\ f_3(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N) = 0 \\ \vdots \\ f_N(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

と書くことができる。未知数は、

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \quad (12)$$

とベクトルで表現する。すると、 i 番目の方程式は、 $f_i(\mathbf{X})$ と書き表されるので、表現が簡単になる。これを、先ほどと同じようにテイラー展開すると

$$f_i(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = f_i(\mathbf{X}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \Delta x_3 \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_N} \Delta x_N + O(\Delta\mathbf{X}^2) \quad (13)$$

となる。 $i = 1, 2, 3, \dots, N$ の全てににおいて、 $f_i(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) = 0$ になるように、 $\Delta\mathbf{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_N)$ を選ぶ。そのように選ぶためには、2 次以降の高次の項を無視すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \frac{\partial f_N}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \vdots \\ \Delta x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(\mathbf{X}) \\ -f_2(\mathbf{X}) \\ -f_3(\mathbf{X}) \\ \dots \\ -f_N(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \quad (14)$$

の線形である N 元 1 次連立方程式が成り立つ。これを解いて、 $\Delta\mathbf{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_N)$ を求める。そうすると、より真の解に近い \mathbf{X}^{new} は、 $\mathbf{X}^{new} = \mathbf{X}^{old} + \Delta\mathbf{X}$ と計算できる。しつこいようである

²これも先ほどと同じで、解に近い必要はなく、狭い範囲は直線で近似できるということである。

が、成分で書き表すと

$$\begin{cases} x_1^{new} = x_1^{old} + \Delta x_1 \\ x_2^{new} = x_2^{old} + \Delta x_2 \\ x_3^{new} = x_3^{old} + \Delta x_3 \\ \vdots \\ x_N^{new} = x_N^{old} + \Delta x_N \end{cases} \quad (15)$$

となる

非線型の連立方程式を線形の連立方程式で計算しているわけである。解きやすい式になった分、反復計算が必要となっている。

4 練習問題

[問 1] ニュートン法を用いて、次の非線型連立方程式の実数の近似解を求めるプログラムを作成せよ。

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \sin x + e^{y-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

ちなみに、近似解は、

$$(x = 3.85779488720852212145788558016052, \quad y = 1.504721878447614920479751585974204)$$

$$(x = 1.997355766768889566933536708853074, \quad y = -1.412340094158768341643120106831151)$$

である。さあ、この近似解が得られるように、がんばろう。

5 参考文献

本図書を書くのに、以下を参考にした。これは数値計算の良い教科書である。理論のみならずプログラムまで載せてあるので、かなり利用価値が高い。

NUMERICAL RECIPES in C [日本語版], Willam H. Press 他, 技術評論社, ISBN4-87408-560-1