

# 常微分方程式の数値計算法

山本昌志\*

2004年9月9日

## 1 常微分方程式

### 1.1 常微分方程式のイメージ

微分方程式は、物理や工学の分野で問題を解く強力なツールばかりか、生物や経済などでも広く応用されています。皆さんにぜひとも身に付けてもらいたいスキルです。微分方程式を使うためには、方程式を作る作ことと解くことが必要です。ここでは、微分方程式を解くこと、特に数値計算により非常に精度の良い近似値を求める方法を学習します。微分方程式では解析解が無いのが普通です。解析解は無いけれども、精度良く近似値を求めたい状況にしばしば遭遇します。このような時、数値計算の出番です。数学に無い面白さがありますので、楽しんでください。

すでに学習したように、独立変数が二つ以上の多変数の関数の微分(偏微分)を含む微分方程式を偏微分方程式(partial differential equation)といいます。それに対して、一変数の関数の微分を含む方程式を常微分方程式(ordinary differential equation)といいます。ここでは、常微分方程式、特に1階の場合の解の近似値を求める方法を学習します。学習する方程式は

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

です。1階だといってバカにはできません。後で述べますが、これが数値計算できると、どんな高階の常微分方程式も同じ方法で数値計算ができます。

ここでの主題は、この微分方程式を満たす  $y(x)$  を求めることです。計算を進める前にこの方程式が何を表すか考えましょう。式(1)の左辺は、解  $y(x)$  の導関数です。即ち、解の曲線の接線を表します。導関数の値が座標  $(x, y)$  の関数になっているわけです。座標  $(x, y)$  が決まれば、曲線の傾きが決まります。

それでは、この常微分方程式のイメージをつかんでもらいましょう。それには、実際の微分方程式を考えるのが良いでしょう。例えば、

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x - y \cos x \quad (2)$$

を考えます。いかにも難しげな微分方程式ですが、これには解析解があります。解析解はとりあえずおいといて、この式の右辺を考えます。この式は接線の傾きを表すので、各座標での傾きを書いてみましょう。この傾きを方向場と言います。すると図1のようになります。この図から、大体の解の様子がわかります。

\*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

実際の解は、

$$y = \sin x - 1 + c_1 e^{-\sin x} \quad (3)$$

です。1階の微分方程式ですから、1個の未知数を含みます。この未知数の値が異なる5本の曲線と、先ほどの方向場を重ねて書き表してみます(図2)。微分方程式の解である曲線  $y(x)$  が方向場に沿ってあること分かるでしょう。元の微分方程式が傾きを表すので、あたりまえのことです。

式(2)の微分方程式から、関数  $y(x)$  の値を得るにはもう一つ条件が必要です。通常この条件は、 $y(x_0) = y_0$  のように与えられます。これを初期値といい、初期値が与えられるものを初期値問題といいます。一方、2点以上の  $x$  で定める  $y$  の値が決まっているような問題を境界値問題といいます。ここでは、もっぱら初期値問題を解くことにします。

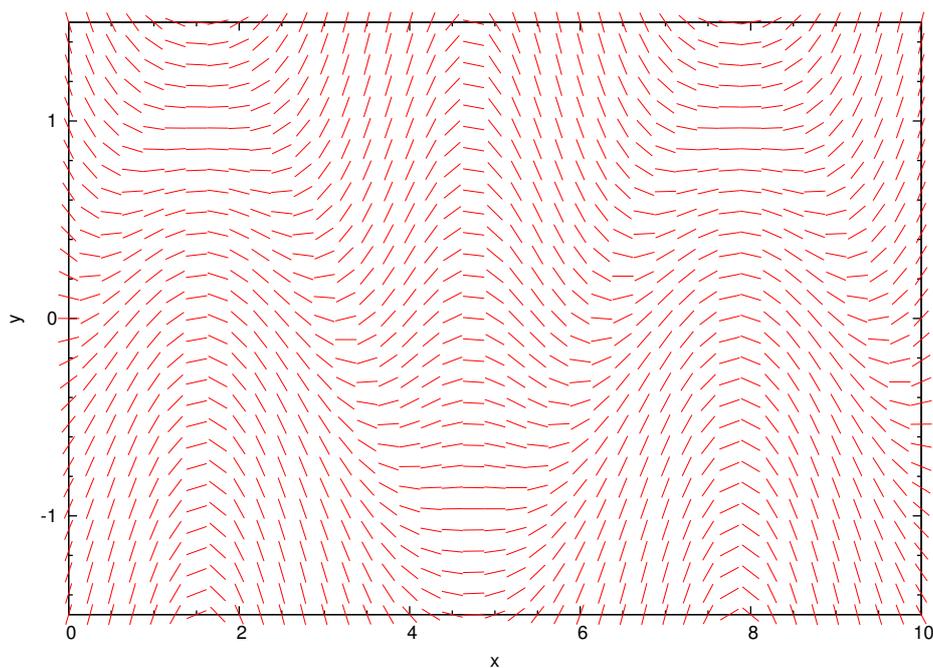


図 1: 微分方程式  $\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x - y \cos x$  の方向場

## 1.2 数値計算のイメージ

初期値問題を計算するルーチンの基礎的な考え方はどれも似通っており、次の通りです。まず(1)式の微分方程式を、極限の  $d$  の代わりに有限な  $\Delta$  に置き換えます。 $\Delta$  が小さければ、元の微分方程式の良い近似になります。すると、(1)式の微分方程式は、

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x \quad (4)$$

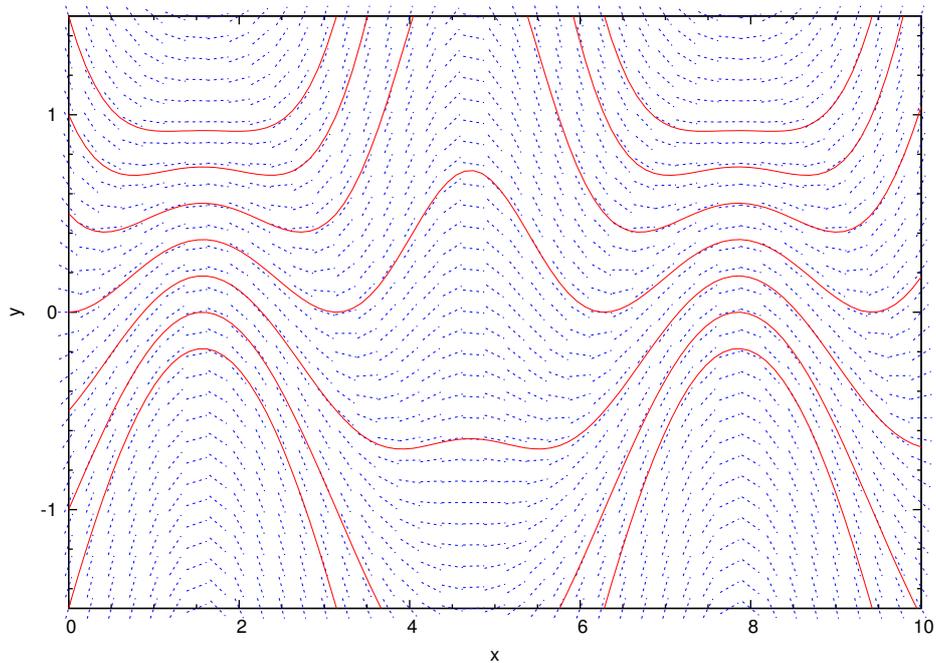


図 2: 方向場と解曲線

のように変形できます。これを用いて、 $x_i$  から  $\Delta x$  離れた  $y$  の値  $y_{i+1}$  を計算します。

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y(x_i + \Delta x) \\
 &= y_i + \Delta y \\
 &= y_i + f(x_i, y_i)\Delta x
 \end{aligned} \tag{5}$$

この式と初期値  $x_0, y_0$  とを用いて、次々に  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$  が計算できます。

式 (5) は、次の  $y_{i+1}$  値は、もとの  $y_i$  にそこでの傾き  $f(x_i, y_i)$  に  $x$  の増分  $\Delta x$  を乗じたものを加えた形になっています。即ち、図 3 の通りです。この図からも分かるようにこの方法をそのまま適用した場合 (オイラー法)、あまり精度がよくありません。出発点のみの導関数を用いているため、終点付近では傾きが異なっています。刻み巾  $\Delta x$  を小さくすることにより解決は出来ませんがその分、計算時間が必要になります。そのため、 $x_i$  と  $x_{i+1}$  の間で、出来るだけ精度よく、この導関数を計算する工夫がいろいろ考えられています。以降、その方法を示します。

## 2 数値計算法

### 2.1 オイラー法

常微分方程式を数値計算で解く方法として、もっとも単純ですが、最も精度の悪い方法です。よっぽどのことが無い限り、この方法で微分方程式を計算してはいけません。ただし、常微分方程式を数値計算するこ

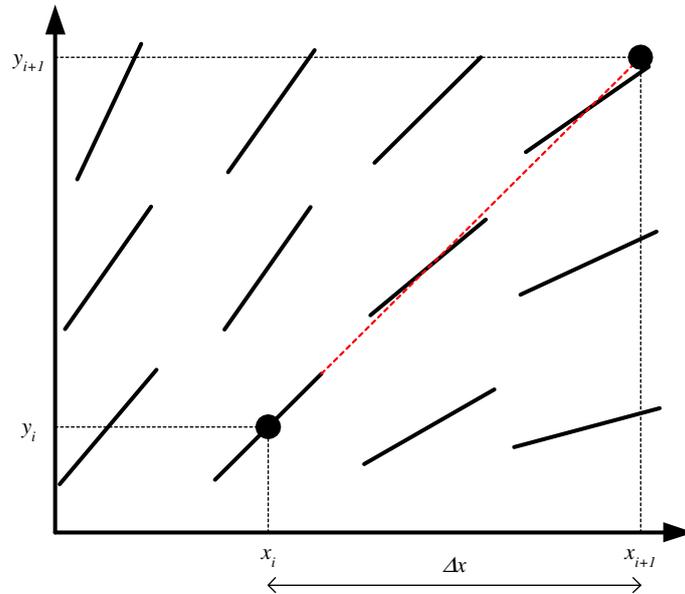


図 3: 方向場と微分方程式の解  $(x_i, y_i)$  と  $(x_{i+1}, y_{i+1})$

とのイメージはつかみやすいので述べておきます。

もう一度、初期条件を含めて数値計算により解くべき方程式を示します。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{初期条件 } y(a) = b \quad (6)$$

この微分方程式の解を  $y = y(x)$  とすると、 $x_i$  のまわりのテイラー展開は、

$$y_{i+1} = y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_i} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=x_i} \Delta x^3 + \dots \quad (7)$$

です。この式の右辺第 2 項は、式 (6) から計算できます。したがって、テイラー展開は、次のように書き表すことができます。

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (8)$$

オイラー法での数値計算では、計算の刻み幅  $\Delta x$  は十分に小さいとして、

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \quad (9)$$

を計算します。式 (5) と全く同じです。このとき計算の精度は 1 次と言います<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>誤差項が  $O(\Delta x^{n+1})$  のとき、方法は  $n$  次の精度という慣わしです

オイラー法をまとめると、以下に示すように微分方程式は差分方程式に変換されます。

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(a) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i) \\ x_{i+1} = x_i + \Delta x \\ x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases} \quad (10)$$

これれから、オイラー法での数値計算は、次の漸化式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \\ x_{i+1} = x_i + \Delta x \end{cases} \quad (11)$$

が得られます。初期値  $(x_0, y_0)$  が決まれば、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$  が同じ手続きで、芋づる式に計算できます。この芋づる式がコンピューターの得意なところ。通常、初期値は  $(a, b)$  と問題で与えられます。

実際にプログラムを行うときは、*for* や *while* を用いて繰り返し計算を行い、結果の  $x_i$  と  $y_i$  は、配列  $x[i]$  や  $y[i]$  に格納します。

```
x[0]=a;
y[0]=b;
while(計算終了条件){
    delta_x や delta_y の計算
    x[i+1]=x[i]+delta_x;
    y[i+1]=y[i]+f(x[i],y[i])*delta_x;
}
```

この方法の計算のイメージは、図4の通りです。明らかに、出発点の導関数のみ利用しているために精度が悪いことが分かります。式も対称でないため、逆から計算すると元に戻りません。

## 2.2 2次のルンゲクッタ法

2次のルンゲ・クッタと呼ばれる方法は、いろいろあります。ここでは、代表的なホイン法と中点法を示します。オイラーは1次の精度でしたが、これらは2次の精度があります。

### 2.2.1 ホイン法

先に示したように、オイラー法の精度は1次です。それに対して、2次のルンゲ・クッタ法の精度は2次です。今まで刻み幅を  $\Delta x$  と記述していましたが、少し式が長くなるので、それを  $h$  と表現します。

2次の精度ということは、テイラー展開より

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3) \quad (12)$$

となっていることを意味します。即ち、計算アルゴリズムが、

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_0 + h) - y(x_0) \\ &= y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3) \end{aligned} \quad (13)$$

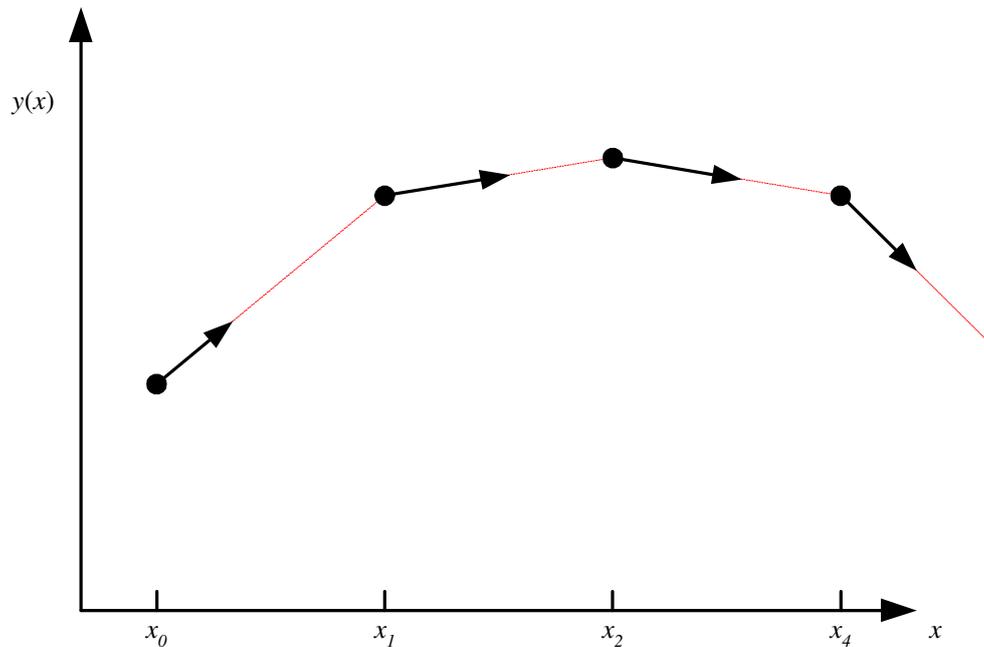


図 4: オイラー法。ある区間での  $y$  の変化  $\Delta y$  は、計算の始めの点の傾きに区間の幅  $\Delta x$  を乗じて、求めている。

となっていることを言います。

式 (13) から分かるように、 $y$  の増分  $\Delta y$  を計算するためには、1 階微分と 2 階微分の 2 項を満たす式が必要です。そうすると少なくとも、2 点の値が必要となります。2 点として、計算区間の両端の導関数の値を使います。この導関数は問題として与えられているので、計算は簡単です。そうして、区間の増分を  $\alpha, \beta$  をパラメータとした和で表すことにします。即ち、以下の通りです。

$$\Delta y = h\{\alpha y'(x_0) + \beta y'(x_0 + h)\} \quad (14)$$

この  $\alpha, \beta$  を上手に選ぶことにより、式 (13) と同一にできます。この式を  $x_0$  の回りでテイラー展開すると

$$\Delta y = (\alpha + \beta)y'(x_0)h + \beta y''(x_0)h^2 + O(h^3) \quad (15)$$

となります。これを、式 (13) と比較すると、 $\alpha + \beta = 1$ ,  $\beta = 1/2$  なので

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (16)$$

とすれば良いことが分かります。これで、必要な式は求まりました。まとめると、式 (6) を数値計算で近似

解を求めるには次式を使うことになります。

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \quad (17)$$

この式は、図5のようになります。オイラー法の図4との比較でも、精度が良いことが分かります。

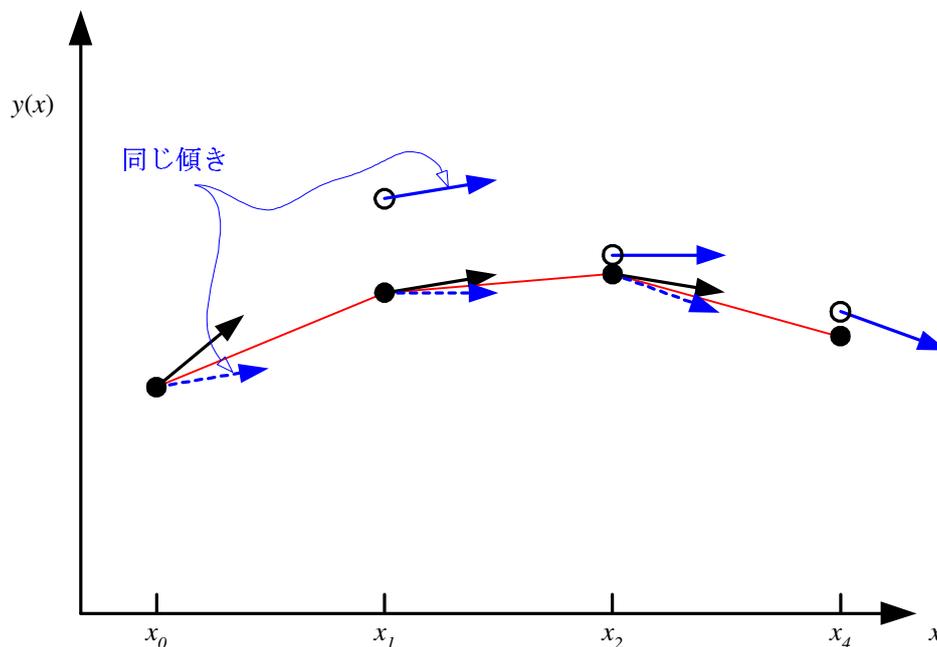


図5: ホイン法。ある区間での  $y$  の変化  $\Delta y$  は、計算の始めと終わりの点付近の平均傾きに区間の幅  $\Delta x$  を乗じて、求めている。

よく見ると、この式(17)は、本当に2次の精度があるのでしょうか?  $\alpha$  や  $\beta$  のパラメーターを計算したときの  $x+h$  の導関数は  $y'(x+h)$  を使いました。一方、式(17)では、 $f(x_n+h, y_n+k_1)$  を使っています。ほんのちょっと違いますので、式(17)が2次の精度を持っているか、検証してみましょう。この式を変形することで、精度を確認しましょう。紙面の都合上、精度の確認は2段階で行います。まず初めは、少なくとも2次の精度があることを確認します。その後、3次の精度はないことを示します。

まずは、少なくとも 2 次の精度があることを確認します。

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\
&= y_n + \frac{h}{2} \{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\} \\
&= y_n + \frac{h}{2} \left\{ f(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_n, y_n) h + O(h^2) \right\} \\
&= y_n + f(x_n, y_n) h + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_n, y_n) \right\} h^2 + O(h^3) \\
&= y_n + \frac{dy}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} h^2 + O(h^3)
\end{aligned} \tag{18}$$

この結果は、まさに式 (7) と同じ形をしており、少なくとも 2 次の精度があることが確認できます。次に 3 次の精度がないことを示します。テイラー展開の 3 次の項は、係数は無視すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{dy}{dx} \right) f + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f \right) f + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) f
\end{aligned} \tag{19}$$

となります<sup>2</sup>。

一方、ホイン法の 2 次公式の  $h^3$  の項、即ち式 (18) の右辺のテイラー展開の 2 次の項は、以下の通りです。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))}{dh^2} &= \frac{d^2 f(x_n + h, y_n + Fh)}{dh^2} \\
&= \frac{d}{dh} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} F + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} F + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} F^2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f
\end{aligned} \tag{20}$$

<sup>2</sup>式 (19) を変形するとき、次式を用いたので注意が必要です。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$$

明らかに、テイラー展開の3次の項である式(19)とホイン法の3次の項の式(20)は異なります。したがって、ホイン法は3次の精度がないことがわかります。少なくとも2次の精度があつて、3次の精度がないことが示され、ホイン法は2次の精度であることが証明されました。

### 2.2.2 中点法

これも、ホイン法と同じ2次の精度です。ホイン法は区間の両端の点の導関数を使いましたが、中点方は始点と中点を使います。2点ありますので2次の精度になります。ホイン法の式(14)に対応するものは、

$$\Delta y = h\{\alpha y'(x_0) + \beta y'(x_0 + \frac{h}{2})\} \quad (21)$$

となります。これを  $x_0$  の回りでテイラー展開すると、

$$\Delta y = (\alpha + \beta)y'(x_0)h + \frac{\beta}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3) \quad (22)$$

となります。これを、式(13)と比較すると、

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad (23)$$

となります。したがって、中点法の公式は、

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ y_{n+1} = y_n + k_2 \end{cases} \quad (24)$$

となります。この公式は、図6のようになります。これが2次の精度であることの証明は、式(18)と同じ手順で、以下の通りです。

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + k_2 \\ &= y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hf(x_n, y_n)}{2}) \\ &= y_n + h \left\{ f(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{h}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_n, y_n) \frac{h}{2} + O(h^2) \right\} \\ &= y_n + f(x_n, y_n)h + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_n, y_n) \right\} h^2 + O(h^3) \\ &= y_n + \frac{dy}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} h^2 + O(h^3) \end{aligned} \quad (25)$$

これで少なくとも2次の精度があることがわかります。一方、3次の精度がないことは、以下の通り明らかである。式(20)と比べて、微小変位  $h$  は、 $\frac{1}{2}$  異なるだけですので、計算結果は、と直ちにわかります。

$$\frac{d^2 f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hf(x_n, y_n)}{2})}{dh^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f \quad (26)$$

これもまた、式(19)と異なりますので、3次の精度がないことがわかります。

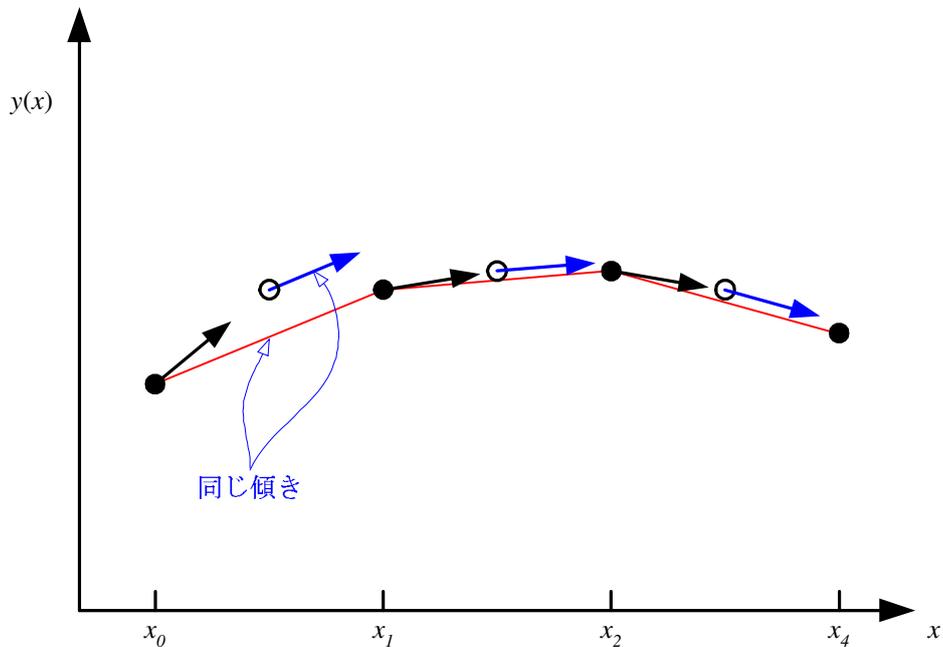


図 6: 中点法。ある区間での  $y$  の変化  $\Delta y$  は、中点付近の傾きに区間の幅  $\Delta x$  を乗じて、求めている。

### 2.3 4 次のルンゲ・クッタ法

今まで示したオイラー法や 2 次のルンゲ・クッタ法のように、パラメーターを増やして誤差項の次数を上げていく方法で、最良の方法と言われるのが 4 次のルンゲ・クッタ法です。パラメーターを増やして、5, 6, 7, ... と誤差項を小さくすることは可能ですが、同じ計算量であれば 4 次のルンゲ・クッタの刻み幅を小さくするほうが精度が良いです。私は、5 次以上のルンゲ・クッタの公式は見たことがありません。

ということで、皆さんが常微分方程式を計算する必要があるときは、何はともあれ 4 次のルンゲ・クッタで計算してください。「この問題を解く場合、4 次のルンゲクッタだな」と一言いって、プログラムを書き始めると、出来るなと思われること間違いなしです。間違っても「2 次のルンゲ・クッタ...」と断言してはいけません。「4 次の方が...」と言う輩が出てきます。普通の科学に携わる人にとって、4 次のルンゲ・クッタは常微分方程式の最初で最後の解法なのです。

ただし、4 次のルンゲ・クッタ法よりも精度の良い方法がないわけでは有りません。より高精度な方法として、Bulirsch-Stoer 法や予測子・修正法などがあります。進んだ勉強をしたいときに、学習してください。

4 次のルンゲ・クッタの公式は、式 (27) に示す通りです。そして、これは図 7 のように表せます。

2 次の場合と同じ手順で、公式を導き、そして 4 次の精度であることが証明できると思います。しかし、

計算は明らかに大変なので、腕力のある人はトライしてみてください。

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \quad (27)$$

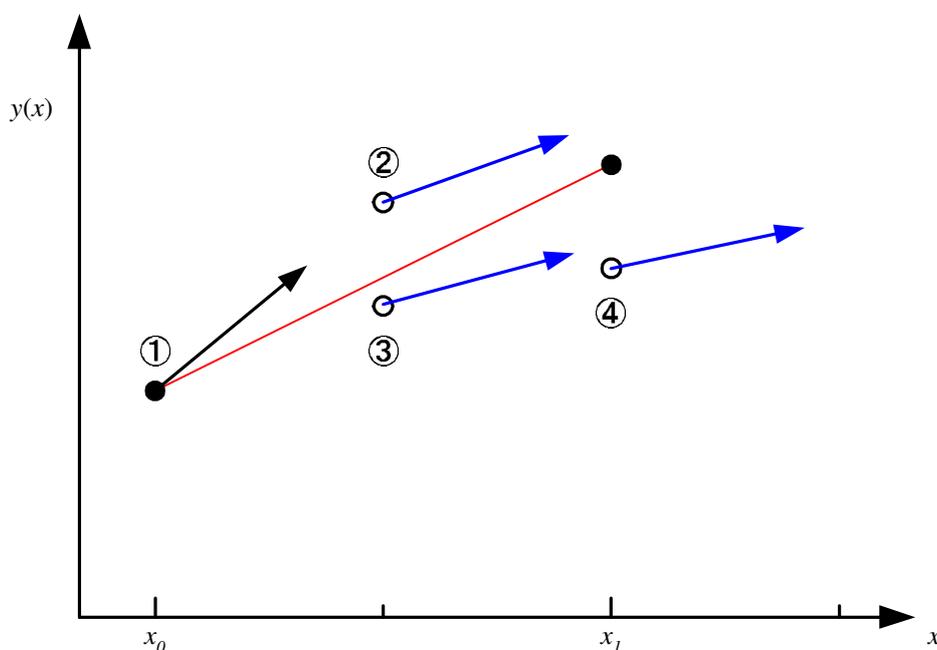


図 7: 4 次のルンゲ・クッタ法。ある区間での  $y$  の変化  $\Delta y$  は、区間内の 4 点の傾きのある種の加重平均に幅  $\Delta x$  を乗じて、求めている。

### 3 高階の常微分方程式

#### 3.1 4 次のルンゲ・クッタ法を使う方法

ここまで示した方法は、わりとエレガントな方法です。しかし、1 階の常微分方程式しか取り扱えないので不便です。そこで、高階の常微分方程式を 1 階の連立微分方程式に直す方法を示します。要するに、高階の常微分方程式を連立 1 階常微分方程式に直し、4 次のルンゲ・クッタ法を適用するということです。例え

ば、次のような 3 次の常微分方程式があったとします。

$$y'''(x) = f(x, y, y', y'') \quad (28)$$

初期条件は、

$$\begin{cases} y(a_0) = b_0 \\ y'(a_1) = b_1 \\ y''(a_2) = b_2 \end{cases} \quad (29)$$

とします。この 3 階常微分方程式を次に示す式を用いて変換します。

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \\ y_2(x) = y''(x) \end{cases} \quad (30)$$

この式を用いて、式 (28) を書き直すと

$$\begin{cases} y_0'(x) = y_1(x) \\ y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = f(x, y_0, y_1, y_2) \end{cases} \quad (31)$$

となります。これで、3階の常微分方程式が3元の1階の連立常微分方程式に変換されました。1階の微分方程式ということで、4次のルンゲ・クッタ法が使えます。以下の通りです。

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{01} = hy_{1.n} \\ k_{11} = hy_{2.n} \\ k_{21} = hf(x_n, y_{0.n}, y_{1.n}, y_{2.n}) \\ k_{02} = h \left( y_{1.n} + \frac{k_{11}}{2} \right) \\ k_{12} = h \left( y_{2.n} + \frac{k_{21}}{2} \right) \\ k_{22} = hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_{0.n} + \frac{k_{01}}{2}, y_{1.n} + \frac{k_{11}}{2}, y_{2.n} + \frac{k_{21}}{2} \right) \\ k_{03} = h \left( y_{1.n} + \frac{k_{12}}{2} \right) \\ k_{13} = h \left( y_{2.n} + \frac{k_{22}}{2} \right) \\ k_{23} = hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_{0.n} + \frac{k_{02}}{2}, y_{1.n} + \frac{k_{12}}{2}, y_{2.n} + \frac{k_{22}}{2} \right) \\ k_{04} = h (y_{1.n} + k_{13}) \\ k_{14} = h (y_{2.n} + k_{23}) \\ k_{24} = hf(x_n + h, y_{0.n} + k_{03}, y_{1.n} + k_{13}, y_{2.n} + k_{23}) \\ y_{0.n+1} = y_{0.n} + \frac{1}{6}(k_{01} + 2k_{02} + 2k_{03} + k_{04}) \\ y_{1.n+1} = y_{1.n} + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) \\ y_{2.n+1} = y_{2.n} + \frac{1}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}) \end{array} \right. \quad (32)$$

### 3.2 練習問題

以下の高解常微分方程式を連立1階微分方程式に書き換えなさい。

- |                                      |                              |
|--------------------------------------|------------------------------|
| (1) $y'' + 3y' + 5y = 0$             | (2) $y'' + 6y' + y = 0$      |
| (3) $5y'' + 2xy' + 3y = 0$           | (4) $y''' + y' + xy = 0$     |
| (5) $5y'' + y' + y = \sin(\omega x)$ | (6) $xy'' + y' + y = e^x$    |
| (7) $5y''y' + y' + y = 0$            | (8) $y''y' + x^2y'y + y = 0$ |

## 4 計算の刻み巾

計算精度を監視しながら、計算の刻み幅  $h$  を変化させると計算の効率は非常によくなります。変化の少ない領域では大きなステップで、変化の大きい領域では小さなステップで計算します。場合によっては、数

十倍、あるいは数百倍の速度で計算ができます。

ただし、この問題は高度になるので、ここでの学習の範囲を超えます。興味のある人は、自分で学習してください。