

電子計算機 3E

3E 2004.4.26

本節の授業のテーマ

本日の事業のテーマは、以下のとおりです。

(1) 数の表現

- いろいろな数字の表記法
- 現代の数字の表記法の意味

(2) 基数の変換

- 変換(2進数→10進数)
- 変換(2進数→16進数)
- 変換(10進数→2進数)

本日の授業のゴールは、以下のとおり。

- 数の表現の意味が分かること。
- 基数の変換の理論が分かること。

1. 数の表現

CASL II を学ぶために必要な数の表現について、学びます。教科書の p.2～p.12 が範囲です。

1.1 いろいろな数字の表記法

通常使われている 10 進数では、0～9 までの 10 個の数字を使って、数を表現します。9 の次は 10 で桁が上がります。2 進数、8 進数、10 進数、16 進数の数の表現を以下に示します。合わせて、桁上がりという考え方の無い楔形文字やローマ数字も併記します。桁上がりという考え方がある場合、桁が上がるたびに、新しい記号が必要です。大きな数字を表す場合、非常に不便です。ゼロが発見されたから、現代の便利な表現が可能になったのです。

数の表現	基数	底
2 進数	2	0, 1
8 進数	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10 進数	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16 進数	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

数	2進数	8進数	10進数	16進数	楔形文字	ローマ数字
•	0	0	0	0	▼	I
••	1	1	1	1	▼	II
•••	10	2	2	2	▼▼	III
••••	11	3	3	3	▼▼▼	IV
•••••	100	4	4	4	▼▼▼	V
••••••	101	5	5	5	▼▼▼	VI
•••••••	110	6	6	6	▼▼▼	VII
••••••••	111	7	7	7	▼▼▼	VIII
•••••••••	1000	10	8	8	▼▼▼	VIII
••••••••••	1001	11	9	9	▼▼▼	IX
•••••••••••	1010	12	10	A	◀	X
••••••••••••	1011	13	11	B	◀▼	XI
•••••••••••••	1100	14	12	C	◀▼▼	XII
••••••••••••••	1101	15	13	D	◀▼▼▼	XIII
•••••••••••••••	1110	16	14	E	◀▼▼▼	XIV
••••••••••••••••	1111	17	15	F	◀▼▼▼	XV
•••••••••••••••••	10000	20	16	10	◀▼▼▼	XVI
••••••••••••••••••	10001	21	17	11	◀▼▼▼	XVII
•••••••••••••••••••	10010	22	18	12	◀▼▼▼	XVIII
••••••••••••••••••••	10011	23	19	13	◀▼▼▼	XIX

1.2 現代の数字の表記法の意味

10進数と2進数や16進数との変換を考える前に、数の表記方法について、勉強しましょう。すると、それらの変換が理解できます。

例えば、今年は2003年です。10進数の2003の表記はどのような意味があるのでしょうか？。これは、次のように解釈します。えらそうですが、こう解釈すると、他の基底の数字の意味がわかりやすくなります。

$$(2003)_{10} = (2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \quad (1)$$

括弧の下の10は、10進法の意味です。非常に簡単です。これさえ、分かれば基底の変換なんか簡単です。

2. 基底の変換

2.1 変換(2進数→10進数)

これは、簡単です。(1)式を理解していれば、分かれます。2進数であろうが、10進数であろうが、表記法は同じです。すなわち、

$$\begin{aligned} (10011)_2 &= (1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\ &= (16 + 0 + 0 + 2 + 1)_{10} \\ &= (19)_{10} \end{aligned} \quad (2)$$

となります。ただ、基底が違うだけです。ところで、この演算を施すと、なぜ、10進数に変換されるのでしょうか？3進法や5進数ではなく、われわれが普通に使う10進数に変換された理由は、なぜでしょうか？10進数は特別なのでしょうか？いいえ、10進数は特別ではありません。みなさん、考えてください。

2.2 変換(2進数→16進数)

これも、非常に簡単です。教科書の例で説明しましょう。

$$\begin{aligned} (0110001100101111)_2 &= (0 \times 2^{15} + 1 \times 2^{14} + 1 \times 2^{13} + 0 \times 2^{12} \\ &\quad + 0 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 \\ &\quad + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 \\ &\quad + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\ &= (0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) \times 2^{12} \\ &\quad + (0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \times 2^8 \\ &\quad + (0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) \times 2^4 \\ &\quad + (1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \times 2^0 \\ &= (6 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + F \times 16^0) \\ &= (632F)_{16} \end{aligned} \quad (3)$$

この例から分かるように、 $16=2^4$ なので、2進数の表記を4桁づつ区切り、それぞれを16進数で表せばよいのです。

2.3 変換(10進数→2進数)

われわれは、10進数の演算になれているため、N進数から10進数への変換は、簡単に行えます。しかし、逆は、ちょっと難しくなります。

計算手法は簡単ですが、その内容を理解することが大事です。計算手法を忘れても、内容が理解できていれば、手法など、自分で作ることができます。では、簡単な例で説明します。10進数の $(19)_{10}$ を2進数に変換する方法です。具体的には、19を

$$(19)_{10} = (a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^3 + a_4 \times 2^4 + \dots) \quad (4)$$

と表現したいのです。それぞれ、 a_n を求めなくてはなりません。そこで、次の変形を考えましょう。

$$(9 \times 2 + 1)_{10} = (a_1 \times 2^0 + a_2 \times 2^1 + a_3 \times 2^2 + a_4 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_0 \quad (5)$$

となります。これをよくにらむと、 $a_0 = 1$ ということが分かります。すなわち、 a_0 は19を2で割ったあまりです。残りの部分は、

$$(9)_{10} = (a_1 \times 2^0 + a_2 \times 2^1 + a_3 \times 2^2 + a_4 \times 2^3 + \dots) \quad (6)$$

となることも分かるでしょう。同じことをすると、

$$(4 \times 2 + 1)_{10} = (a_2 \times 2^0 + a_3 \times 2^1 + a_4 \times 2^2 + a_5 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_1 \quad (7)$$

となります。したがって、 $a_1 = 1$ になります。しつこいようですが、さらに同様に進めると、

$$\begin{aligned} (2 \times 2 + 0)_{10} &= (a_3 \times 2^0 + a_4 \times 2^1 + a_5 \times 2^2 + a_6 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_2 \Rightarrow a_2 = 0 \\ (1 \times 2 + 0)_{10} &= (a_4 \times 2^0 + a_5 \times 2^1 + a_6 \times 2^2 + a_7 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_3 \Rightarrow a_3 = 0 \\ (0 \times 2 + 1)_{10} &= (a_5 \times 2^0 + a_6 \times 2^1 + a_7 \times 2^2 + a_8 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_4 \Rightarrow a_4 = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

となります。最後の式から、 $a_n = 0$ ($n \geq 5$)が分かります。以上をまとめると

$$\begin{aligned} (19)_{10} &= (a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0) \\ &= (1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\ &= (10011)_2 \end{aligned} \quad (9)$$

です。要するに、2で割ったあまりを書いていけばよいのです。
よく使われるには、以下のようにして計算します。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \Big) \underline{19} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{9} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{4} \quad — \quad 0 \\
 2 \Big) \underline{2} \quad — \quad 0 \\
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2 \Big) \underline{2003} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{1001} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{500} \quad — \quad 0 \\
 2 \Big) \underline{250} \quad — \quad 0 \\
 \end{array}
 \\[10pt]
 \begin{array}{r}
 1 \\
 2 \Big) \underline{125} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{62} \quad — \quad 0 \\
 2 \Big) \underline{31} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{15} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{7} \quad — \quad 1 \\
 2 \Big) \underline{3} \quad — \quad 1 \\
 \end{array}
 \\[10pt]
 1
 \end{array}$$

それぞれは、

$$(19)_{10} = (10011)_2 \quad (10)$$

$$(2003)_{10} = (11111010011)_2 \quad (11)$$

に対応します。よく、内容を理解して、変換の練習をしてください。

2.4 変換(10進数→16進数)

10進数を2進数に変換する方法が理解できたら、16進数に変換する方法は簡単です。同じことをすれば良いのです。たとえば、教科書の例を実施すると、次のようにになります。

$$\begin{array}{r}
 16 \Big) \underline{25391} \quad — \quad 15 \quad — \quad F \\
 16 \Big) \underline{1586} \quad — \quad 2 \quad — \quad 2 \\
 16 \Big) \underline{99} \quad — \quad 3 \quad — \quad 3 \\
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 6 \quad — \quad — \quad 6
 \end{array}$$

教科書の方法より、簡単だと思います。手計算を実施する場合、通常、この方法を用います。ただし、実際のエンジニアは、電卓の変換機能を使います。