

本節の授業のテーマ

本日の授業のテーマは、以下のとおりです。

- (1) 数の表現
  - いろいろな数字の表記法
  - 現代の数字の表記法の意味
- (2) 基数の変換
  - 変換(2進数→10進数)
  - 変換(2進数→16進数)
  - 変換(10進数→2進数)

本日の授業のゴールは、以下のとおり。

- 数の表現の意味が分かること。
- 基数の変換の理論が分かること。



## 1.2 現代の数字の表記法の意味

10進数と2進数や16進数との変換を考える前に、数の表記方法について、勉強しましょう。すると、それらの変換が理解できます。

例えば、今年は2003年です。10進数の2003の表記はどのような意味があるのでしょうか。これは、次のように解釈します。えらそうですが、こう解釈すると、他の基数の数字の意味がわかりやすくなります。

$$(2003)_{10} = (2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \quad (1)$$

括弧の下の10は、10進法の意味です。非常に簡単です。これさえ、分かれば基数の変換なんか簡単です。

## 2. 基数の変換

### 2.1 変換(2進数→10進数)

これは、簡単です。(1)式を理解していれば、分かります。2進数であろうが、10進数であろうが、表記法は同じです。すなわち、

$$\begin{aligned} (10011)_2 &= (1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\ &= (16 + 0 + 0 + 2 + 1)_{10} \\ &= (19)_{10} \end{aligned} \quad (2)$$

となります。ただ、基数が違うだけです。ところで、この演算を施すと、なぜ、10進数に変換されるのでしょうか。3進法や5進数ではなく、われわれが普通に使う10進数に変換された理由は、なぜでしょうか。10進数は特別なのでしょうか。いいえ、10進数は特別ではありません。みなさん、考えてください。

### 2.2 変換(2進数→16進数)

これも、非常に簡単です。教科書の例で説明しましょう。

$$\begin{aligned} (0110001100101111)_2 &= (0 \times 2^{15} + 1 \times 2^{14} + 1 \times 2^{13} + 0 \times 2^{12} \\ &\quad + 0 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 \\ &\quad + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 \\ &\quad + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\ &= (0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) \times 2^{12} \\ &\quad + (0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \times 2^8 \\ &\quad + (0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) \times 2^4 \\ &\quad + (1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \times 2^0 \\ &= (6 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + F \times 16^0) \\ &= (632F)_{16} \end{aligned} \quad (3)$$

この例から分かるように、 $16=2^4$ なので、2進数の表記を4桁ずつ区切り、それぞれを16進数で表せばよいのです。

### 2.3 変換(10進数→2進数)

われわれは、10進数の演算になれているため、N進数から10進数への変換は、簡単に行えます。しかし、逆は、ちょっと難しくなります。

計算手法は簡単ですが、その内容を理解することが大事です。計算手法を忘れても、内容が理解できていれば、手法など、自分で作ることができます。では、簡単な例で説明します。10進数の $(19)_{10}$ を2進数に変換する方法です。具体的には、19を

$$(19)_{10} = (a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^3 + a_4 \times 2^4 + \dots) \quad (4)$$

と表現したいのです。それぞれ、 $a_n$ を求めなくてはなりません。そこで、次の変形を考えましょう。

$$(9 \times 2 + 1)_{10} = (a_1 \times 2^0 + a_2 \times 2^1 + a_3 \times 2^2 + a_4 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_0 \quad (5)$$

となります。これをよくにらむと、 $a_0 = 1$ ということが分かります。すなわち、 $a_0$ は19を2で割ったあまりです。残りの部分は、

$$(9)_{10} = (a_1 \times 2^0 + a_2 \times 2^1 + a_3 \times 2^2 + a_4 \times 2^3 + \dots) \quad (6)$$

となることも分かるでしょう。同じことをすると、

$$(4 \times 2 + 1)_{10} = (a_2 \times 2^0 + a_3 \times 2^1 + a_4 \times 2^2 + a_5 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_1 \quad (7)$$

となります。したがって、 $a_1 = 1$ になります。しつこいようですが、さらに同様に進めると、

$$\begin{aligned} (2 \times 2 + 0)_{10} &= (a_3 \times 2^0 + a_4 \times 2^1 + a_5 \times 2^2 + a_6 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_2 \Rightarrow a_2 = 0 \\ (1 \times 2 + 0)_{10} &= (a_4 \times 2^0 + a_5 \times 2^1 + a_6 \times 2^2 + a_7 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_3 \Rightarrow a_3 = 0 \\ (0 \times 2 + 1)_{10} &= (a_5 \times 2^0 + a_6 \times 2^1 + a_7 \times 2^2 + a_8 \times 2^3 + \dots) \times 2 + a_4 \Rightarrow a_4 = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

となります。最後の式から、 $a_n = 0$  ( $n \geq 5$ )が分かります。以上をまとめると

$$\begin{aligned} (19)_{10} &= (a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0) \\ &= (1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\ &= (10011)_2 \end{aligned} \quad (9)$$

です。要するに、2で割ったあまりを書いていけばよいのです。

よく使われるのは、以下のようにして計算します。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 19} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 9} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 4} \text{ --- } 0 \\
 2 \overline{) 2} \text{ --- } 0 \\
 \phantom{2 \overline{) 2}} 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2003} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 1001} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 500} \text{ --- } 0 \\
 2 \overline{) 250} \text{ --- } 0 \\
 2 \overline{) 125} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 62} \text{ --- } 0 \\
 2 \overline{) 31} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 15} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 7} \text{ --- } 1 \\
 2 \overline{) 3} \text{ --- } 1 \\
 \phantom{2 \overline{) 3}} 1
 \end{array}$$

それぞれは、

$$(19)_{10} = (10011)_2 \tag{10}$$

$$(2003)_{10} = (11111010011)_2 \tag{11}$$

に対応します。よく、内容を理解して、変換の練習をしてください。

#### 2.4 変換(10進数→16進数)

10進数を2進数に変換する方法が理解できたら、16進数に変換する方法は簡単です。同じことをすれば良いのです。たとえば、教科書の例を実施すると、次のようになります。

$$\begin{array}{r}
 16 \overline{) 25391} \text{ --- } 15 \text{ --- } F \\
 16 \overline{) 1586} \text{ --- } 2 \text{ --- } 2 \\
 16 \overline{) 99} \text{ --- } 3 \text{ --- } 3 \\
 \phantom{16 \overline{) 99}} 6 \text{ --- } 6
 \end{array}$$

教科書の方法より、簡単だと思います。手計算を実施する場合、通常、この方法を用います。ただし、実際のエンジニアは、電卓の変換機能を使います。