

フーリエ変換とその周辺

山本昌志*

2003年10月1日

1 はじめに

本テキストは、実験実習「ひずみ波交流の周波数分析」を行う上で必要な基礎知識を記述している。この実験では、フーリエ級数やフーリエ変換を数学ではなく、実験を通して、体験として学習してほしい。本当は、Fast Fourier Transform(FFT) アナライザを用いた実験よりも、計算機で自らプログラムを作成した方がより分かるのですが、ここではそのプロセスを飛ばして、実験をすることになります。プログラムに興味があり、数学の好きな人はぜひこれらを計算機により体験してみてください。

ということで、実験に必要な基礎知識として、本テキストでは、いかについて述べます。

- フーリエ級数
- フーリエ変換
- 高速フーリエ変換

2 フーリエ級数

2.1 正弦、余弦級数

フーリエ級数は、フーリエ (1768-1830 フランス) が熱伝導の方程式を研究しているときに発見した級数である。今は、もっぱら波 (振動も波と考える) の問題に適用されている。

フーリエ級数とは、つぎのように区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された任意の関数を \sin と \cos で展開したものである。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (1)$$

この式が正確に成り立つために $f(x)$ に課せられる条件は、 $f(x)$ はたかだか有限個の有限な不連続点しか持たず、また有っても有限個の極値、極大値または極小値を持つことである。科学技術で用いられる普通の関

*国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

数はこの条件を満たす。驚いたことに、有限個の有限な不連続点も許されることである。不連続点は、今までほぼ無視してきたと思われる不連続点を取り扱えるというのは面白いことである。

このように関数を展開することはいろいろな場面で使われる。皆さんは、これ以外にも冪乗に展開するテイラー展開というものをすでに学習しているはずである。場面に応じて都合の良い展開を使えばよいのです。

本当に任意の関数が、式(1)に展開できることの証明は数学の教科書に譲ることにして、その展開の係数、フーリエ係数 a_n と b_n を求めることにする。これこそが、フーリエ級数やフーリエ変換、あるいはFFT の実際の計算です。これは簡単で、三角関数の次の性質を使えば計算できる。ただし、 m と n は1以上の整数とする。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx = 0 \quad (4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx = 0 \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx = 0 \quad (6)$$

まずは、 a_0 のを計算する。そのために、式(1)の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ を x で積分する。すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= \pi a_0 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。これから、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (8)$$

と計算できる。 $\frac{a_0}{2}$ は、関数 $f(x)$ の区間 $[-\pi, \pi]$ の平均値になっていることに気が付いてほしい。これを技術者は直流成分と言う。

つぎに、 a_n を求めよう。式(1)の両辺に $\cos mx$ を書いて、区間 $[-\pi, \pi]$ を x で積分する。すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \\ &= a_m \pi \end{aligned} \quad (9)$$

となる。これから、直ちに a_n は計算できて、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

となる。ここで、この式と式 (8) を比べる。すると、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

となるのが分かり、式がひとつ節約できる。同様に、 b_n は、両辺に $\sin mx$ をかけて、積分を行います。すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \\ &= b_m \pi \end{aligned} \quad (12)$$

となる。したがって、 b_n は、

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

と求めることができる。この式と式 (11) からフーリエ係数が計算でき、式 (1) の展開ができる。

本当に、この式が正しいか実際に計算してみる。例えば、次関数をフーリエ展開する。

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad (14)$$

この関数のグラフを図 1 に示す。そして、それを有限個のフーリエ係数で表したものを図 2~5 に示す。これらの図から、係数を多くすれば元の関数に収束することが分かる。式 (14) のように病的な関数が素性の良い三角関数で展開できるのは不思議ことである。まあ、無限の級数となっているので、その病的なことをカバーしているのであろう。

フーリエ展開を使うと、ここで示した変な関数でも普通の関数に展開できる。変な関数を扱うとき、これが応用できかなり強力武器になる。最後に、フーリエ係数 $n = 100$ まで計算したものを範囲 $[-3\pi, 3\pi]$ までプロットしたものを図 6 に示す。周期が 2π になっていることがわかる。

ここまで示したフーリエ級数は、 $[-\pi, \pi]$ における正規直交関数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x, \dots \right\} \quad (15)$$

における直交関数展開と考えることができる。

2.2 複素フーリエ級数

波や振動の問題を扱うとき三角関数を使うよりも、複素数の指数関数で計算する方が、見通しよく計算できる。それでは、元の式 (1) を書き直す。まずオイラーの公式を使って、三角関数を指数関数に直す。そう

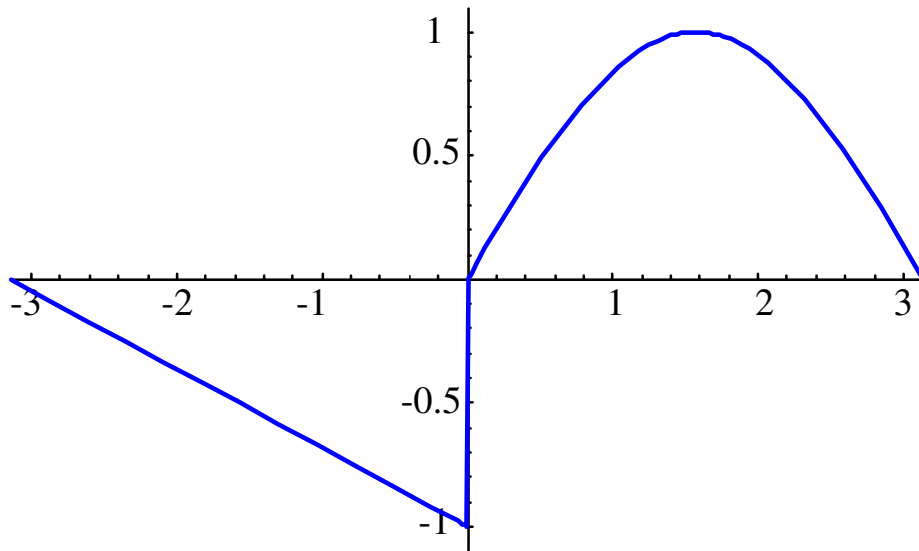


図 1: 式 (14) のグラフ

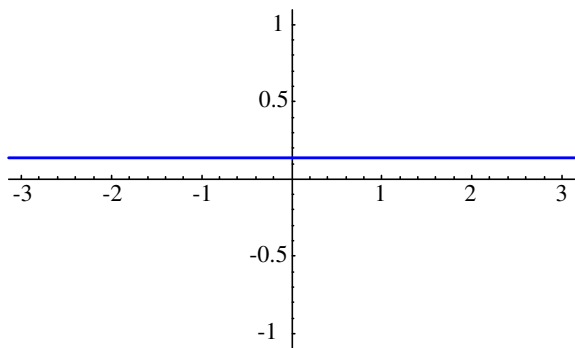


図 2: フーリエ係数 $n = 0$ の時。

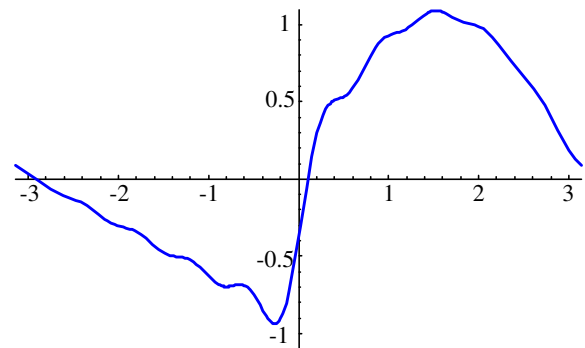


図 3: フーリエ係数 $n = 10$ まで計算したとき

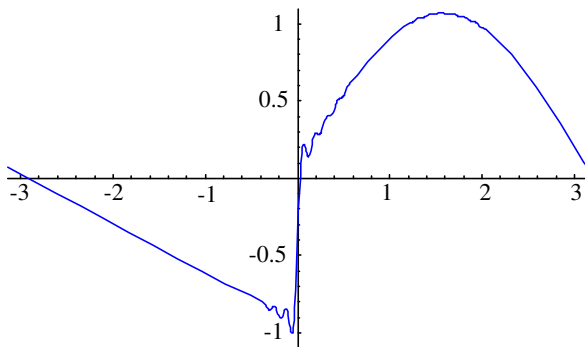


図 4: フーリエ係数 $n = 50$ まで計算したとき

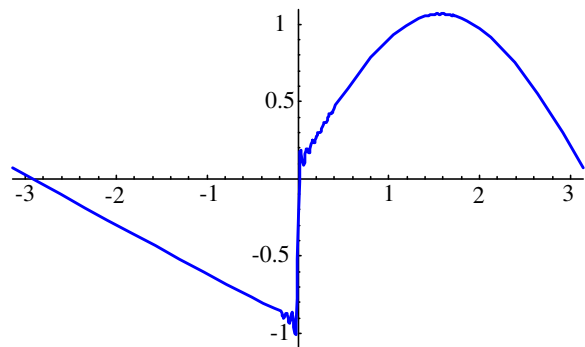


図 5: フーリエ係数 $n = 100$ まで計算したとき

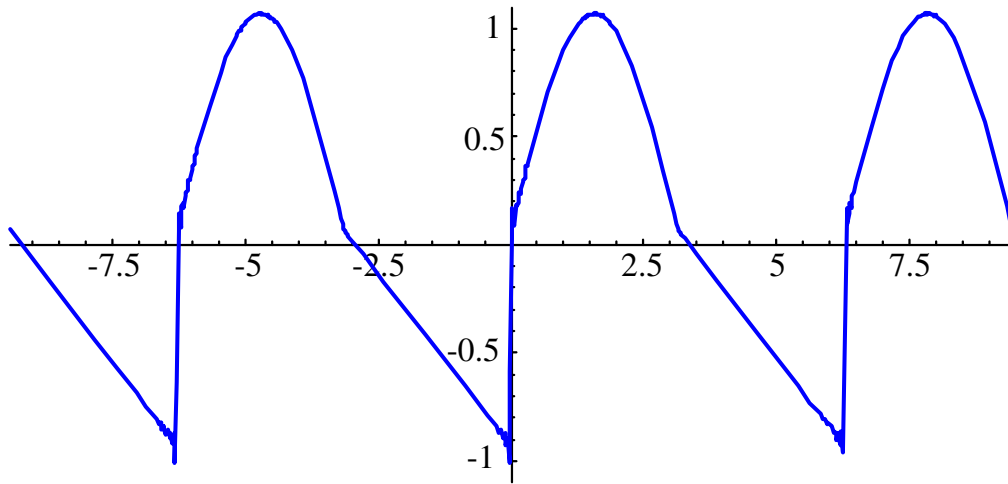


図 6: フーリエ係数 $n = 100$ まで計算したとき

すると、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

となる。ここで、 e^{inx} と e^{-inx} の係数を考える。式 (10) と (13) から、

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx
 \end{aligned} \tag{17}$$

となる。もう一方も、

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx
 \end{aligned} \tag{18}$$

と似たような式になる。というか、複素共役の関係である。ここで、

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \tag{19}$$

とおく。すると、(10) と (13) から、

$$\begin{aligned}
 c_{-n} &= \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} \\
 &= \frac{a_n + ib_{-n}}{2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

となり、式 (17) と (18) とも矛盾しない。同様に、

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0 - ib_0}{2} \\ &= \frac{a_n}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。これらから、式 (16) は、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (22)$$

となる。その係数 c_n は、

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (23)$$

と計算できる。これが複素フーリエ級数である。

2.3 一般的な周期

これまでの議論は区間を $[-\pi, \pi]$ としてその周期が 2π であったが、もっと一般的な形に書き改める。区間を $[-T/2, T/2]$ として、周期を T とする。ついでに、 x 軸を時間軸にする。すると、展開する正規直交関数が式 (24) の代わりに

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right), \dots \right\} \quad (24)$$

となる。一般に角振動数 ω が

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (25)$$

と定義できる。もし、時間軸ではなく長さの時限の軸であれば、角振動数 ω の代わりに、波数 k になるだけである。

そうすると、フーリエ展開の式は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (26)$$

となる。後の議論は同じで、

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega t) dt \quad (27)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega t) dt \quad (28)$$

である。複素フーリエ級数も同じで、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (29)$$

となる。その係数 c_n は、

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega t} dt \quad (30)$$

となる。

3 フーリエ変換

今回は説明しません。

4 計算機によるフーリエ変換

このあたりの議論は、数学セミナーの1998年12月号を参考にしています。というかほとんどパクリです。

4.1 離散フーリエ変換

ここでは、計算機によりフーリエ変換を行う方法を学習する。今までは数学だったので、関数 $f(x)$ は連続的な値であった。しかし、実際の測定量、例えば電圧など連続的に測定してそのデータが蓄えられるわけではない。連続ではなく離散的なデータとなる。これを上手に扱いフーリエ変換する方法を考えよう。

ここでも話を簡単にするために、周期を 2π とする。その、周期の中で N 個の等間隔でデータが得られたとしよう。データが等間隔に並ぶということは重要です。すなわち、

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (31)$$

の点でデータが得られたものとする。ここで得られデータを

$$f_j = f(x_j) \quad (32)$$

とおく。

準備ができたので、実際のフーリエ級数の式 (22) を評価してみる。測定量である f_j と x_j はそれぞれ N 個しかありません。従って、フーリエ係数の c_n も N 個しか決めることはできません。そうすると展開の基底も N 個になります。その基底として

$$\{1, e^{ix}, e^{2ix}, e^{3ix}, \dots, e^{(N-1)ix}\} \quad (33)$$

とします。周波数領域で考えると、0 から始まり $T/(N-1)$ まで等間隔の周波数で展開することになる。したがってフーリエ級数の展開式は、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx} \quad (34)$$

となります。ここで残された問題は、測定量の x_j と f_j から c_k を決めることとなります。これは比較的簡単で、

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx_j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (35)$$

の連立方程式を解けばよろしい。この式の形が分かりにくい。それではもう少し分かり易く書いてあげよう。

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{ix_1} & e^{2ix_1} & \dots & e^{(N-1)ix_1} \\ 1 & e^{ix_2} & e^{2ix_2} & \dots & e^{(N-1)ix_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{ix_{N-1}} & e^{2ix_{N-1}} & \dots & e^{(N-1)ix_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} \quad (36)$$

x_j は測定量なので、この $N \times N$ は計算可能である。この連立方程式から、未知数であるフーリエ係数 c_k を決めれば良い。後で学習する高速フーリエ変換 (First Fourier Transform 略して FFT) は、この c_k をあえる工夫されたアルゴリズムで高速に計算しているだけです。

話を元に戻します。「なるほど、連立方程式ならば計算機は得意なので、式 (36) を解けば話は終わり」と思っははいけません。 $N = 1000$ 位になるとこの式を計算するのに膨大な時間がかかります。

そこで、この式を計算する工夫を考えます。そのために、

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ilx_j} = \begin{cases} 1 & l/N \text{ が整数} \\ 0 & l/N \text{ が整数でない} \end{cases} \quad (37)$$

を使います。この式は以下のように等比級数の和を考えることにより導くことができます。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ilx_j} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{il \frac{2\pi}{N}} \right)^j \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{il \frac{2\pi}{N} N}}{1 - e^{il \frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi il}}{1 - e^{il \frac{2\pi}{N}}} \end{aligned} \quad (38)$$

この最後の式で、 l/N が整数でないときは分母がゼロ、分子がゼロではないので、全体でゼロになることが分かります。もちろん、 $l=0$ の場合も整数です。 l/N が整数の場合、分母、分子ともゼロになるので、指数関数をテイラー展開すると式 (37) が確認できます。

式 (35) の両辺に $\frac{1}{N} e^{-ik'x_j}$ ($k' = 0, 1, 2, \dots, N-1$) をかけて、 j について和を取ります。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ik'x_j} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx_j} \right) e^{-ik'x_j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_k e^{ix_j(k-k')} \end{aligned} \quad (39)$$

式 (37) から、 $k = k'$ 以外はゼロになる

$$= c_{k'}$$

これで、 c_k を求める公式が得られました。もう少しきれいにまとめると、

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikx_j} \quad (40)$$

となります。この式が離散フーリエ変換 (DFT) と呼ばれる式です。もう少し分かりやすく書くと、

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-ix_1} & e^{-2ix_1} & \dots & e^{-(N-1)ix_1} \\ 1 & e^{-ix_2} & e^{-2ix_2} & \dots & e^{-(N-1)ix_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-ix_{N-1}} & e^{-2ix_{N-1}} & \dots & e^{-(N-1)ix_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (41)$$

となります。

4.2 高速フーリエ変換

式 (40) は連立方程式 (36) よりは計算量が少ないものの、相当の計算量であることに違いがありません。式 (41) を見れば分かるように、 c_n を計算するためには、積が N^2 回と和が $N(N-1)$ 回の計算が必要ながことが分かります。要するに、 N^2 オーダーの計算が必要です。たとえば、 $N = 10000$ とすると 1 億回オーダーの計算が必要になります。この程度ならば、現在のパソコンでやれないことはないと思いますが、高速フーリエ変換 (FFT) が発見された??1965 年頃はそんなに簡単に計算できませんでした。

この計算を早くする要求があり、クーリーとチューキーによって高速フーリエ変換のアルゴリズムが発見されました。つぎに示すようにアルゴリズムは比較的簡単なもので、彼らが発表する以前からこのアルゴリズムを使ってプログラムを作成していた人がいたようです。しかし、FFT を実際に広めたのが彼らの論文だったので、彼らが発見者ということになっています。

それでは、FFT の考え方を示します。まず変換の長さ N が $N = N_1P$ と 2 つの整数 N_1, P の積になっている場合を考えます。そして

$$j = N_1j_p + j_1, \quad (j_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1 \quad j_p = 0, 1, 2, \dots, P - 1) \quad (42)$$

$$k = Pk_1 + k_p, \quad (k_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1 \quad k_p = 0, 1, 2, \dots, P - 1) \quad (43)$$

のように表示します。すると、式 (40) はつぎの用に変形できます。

$$\begin{aligned} c_{Pk_1+k_p} &= \frac{1}{N} \sum_{j_p=0}^{P-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f_{N_1j_p+j_1} e^{-i(Pk_1+k_p)\frac{2\pi}{N}(N_1j_p+j_1)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j_p=0}^{P-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f_{N_1j_p+j_1} e^{-\frac{2\pi i}{N}N_1Pk_1j_p} e^{-\frac{2\pi i}{N}N_1k_pj_p} e^{-\frac{2\pi i}{N}(Pk_1+k_p)j_1} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j_p=0}^{P-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f_{N_1j_p+j_1} e^{-\frac{2\pi i}{N}N_1k_pj_p} e^{-\frac{2\pi i}{N}(Pk_1+k_p)j_1} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}(Pk_1+k_p)j_1} \sum_{j_p=0}^{P-1} f_{N_1j_p+j_1} e^{-\frac{2\pi i}{N}N_1k_pj_p} \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 $c_k = c_{Pk_1+k_p}$ を $C(k_p, k_1)$ のよう表示します。同様に、 f_j は $F(j_p, j_1)$ とあらわします。そして、

$e^{-\frac{2\pi i}{N}Z}$ を W_N^Z とあらわして、式を書き改めると

$$C(k_p, k_1) = \frac{1}{N} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} W_N^{(Pk_1+k_p)j_1} A_1(j_1, k_p) \quad (45)$$

$$A_1(j_1, k_p) = \sum_{j_p=0}^{P-1} W^{N_1 k_p j_p} F(j_p, j_1) \quad (46)$$

このように演算が分解できた。これは、もとの式 (40)、

$$C(k) = \frac{1}{N} W_N^{jk} F(j) \quad (47)$$

を変形したと考える。

式 (45) の計算には、 $N_1^2 P$ 回の乗算と $N_1(N_1-1)P$ 回の加算の演算が必要である。一方、式 (46) の場合、 $N_1 P^2$ 回の乗算と $N_1 P(P-1)$ 回の加算の演算が必要である。合わせて、乗算は $N_1 P(N_1+P) = N(N_1+P)$ 、加算は $N_1 P(N_1+P-2) = N(N_1+P-2)$ の演算が必要である。 N^2 オーダーから、 $N(N_1+P)$ オーダーの計算量になったこととなります。 $N = 10000$ の場合、計算回数が 1 億回から、 $N_1 = P = 100$ として 200 万回に激減したことになります。ちょっと工夫するだけで計算回数が、1/50 になったのです。

次に、 $P = N_2 \times Q$ のように N_2 と R の積に分解できたと場合を考える。すると、式 (45) と式 (45) の j_p と k_p をそれぞれ、 $(j_q, j_2), (k_q, k_2)$ の組に分けて、同じことを行う。すると、計算回数は、 $N(N_1+N_2+Q)$ まで減らすことができる。これを繰り返すことにより、計算回数を $N(N_1+N_2+N_3+\dots)$ まで減らすことができる。これが、FFT の考え方である。