

# 波動方程式補足 (進行波の取り扱い)

山本昌志\*

2004年2月12日

## 1 進行波の取り扱い

先の練習問題、弦を三角形に張った後の様子は、定在波である。ここでは、進行波の記述方法について、コメントしておく。進行波を数値計算すると面白いのでその方法を示す。進行波を記述するためには、初期条件さえ記述すれば、後の差分方程式は同じである。その初期条件の記述の仕方を示す。

元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

には、明らかに、ダランベールの解

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (2)$$

というものがある。これは元の波動方程式に代入すれば、それを満足していることは直ちに理解できる。ここで、 $f(x - ct)$  は  $x$  軸を正の方向に進む進行波 (forward wave) で、 $g(x + ct)$  は負の方向に進む後進波 (backward wave) である。

初期条件

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (3)$$

の波が  $x$  軸を正の方向に進む進行波として取り扱うには、どうしたらよいだろうか?。のこる条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (4)$$

である。進行波になるように、 $\psi(x)$  を決めればよい。 $u(x, t)$  を進行波と仮定すると、式 (3) から

$$u(x, \Delta t) = \phi(x - c\Delta t) \quad (5)$$

---

\* 国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

となる。この式を使って、 $\psi(x)$  を求めることにする。 $\psi(x)$  の定義より、

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, \Delta t) - u(x, 0)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(x - c\Delta t) - \phi(x)}{\Delta t} \\
 &\quad c\Delta t = \Delta x \text{ とおくと} \\
 &= -c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(x - \Delta x)}{\Delta x} \\
 &= -c \frac{d\phi}{dx}
 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。進行波にするためには、 $\psi(x)$  は  $\phi(x)$  の導関数にすればよいのである。  
念のため言うておくが、後進波にするためには

$$\psi(x) = c \frac{d\phi}{dx} \tag{7}$$

とすればよい。

## 2 練習問題

前回の問題の弦の上を進む進行波と後進波について、計算してみよう。弦の長さ  $L = 1$ 、波の速度は  $c = 1$ 、両端は固定されているとする。その条件のもとで、以下 2 つの波が衝突する様子を計算せよ。

後進波は、

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x) &= a \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2} \right] \\
 &\text{ただし、} \\
 a &= 0.5 \\
 \sigma_1 &= 0.02 \\
 x_1 &= 0.8
 \end{aligned} \tag{8}$$

とする。そして、進行波は、

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x) &= a(x - x_0) \exp \left( -\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2} \right) \\
 &\text{ただし、} \\
 a &= 20 \\
 \sigma_1 &= 0.02 \\
 x_0 &= 0.4
 \end{aligned} \tag{9}$$

とする。 $t = 0$  のときの様子を、図 1 に示す。波の衝突で、その形はどうなるか?。壁に衝突するとどうなるか?計算せよ。

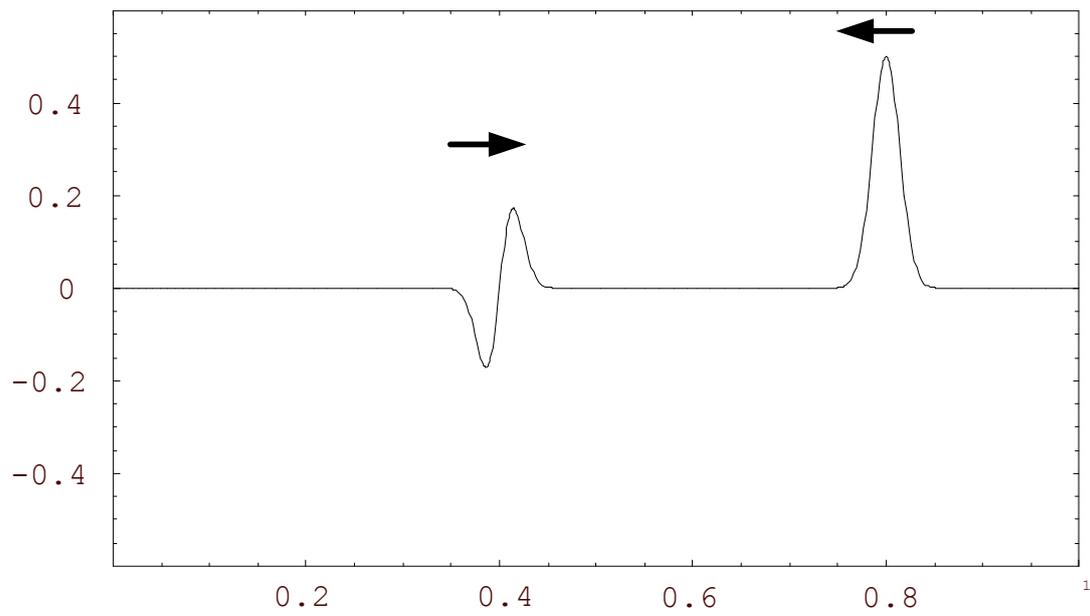


図 1:  $t = 0$  の時の進行波と後進波の様子。