

# 練習問題解答

山本昌志\*

平成15年9月11日

## 1 高階の常微分方程式

高階の常微分方程式を連立1階微分方程式に書き換えるという問題です。それにより高階の微分方程式でも、ルンゲ・クッタ法が使えるようになります。

### 1.1 問題(1)

$$y'' + 3y' + 5y = 0 \quad (1)$$

これは2階の常微分方程式ですから、2元1階常微分方程式に変形できるはずですが、まず、

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \end{cases} \quad (2)$$

と変数の変換をします。この変数変換により、

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1 \quad (3)$$

が直ちに導けます。これは求める2つの式の1つになります。

もう一つは、問題で与えられている式に変数変換の式(2)を適用します。すると、

$$y'' + 3y' + 5y = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dy_1}{dx} + 3y_1 + 5y_0 = 0 \quad (5)$$

$$(6)$$

となります。ここでは、

$$\frac{dy_1}{dx} = y'' \quad (7)$$

---

\* 国立秋田工業高等専門学校 電気工学科

を利用したことを忘れないでください。

したがって、式 (3), (6) から、連立方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = -5y_0 - 3y_1 \end{cases} \quad (8)$$

となります。これが問題に対する解答です。

## 1.2 問題 (2)

$$y'' + 6y' + y = 0 \quad (9)$$

問題 1 と同じ方法で式を変形します。すると、

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = -y_0 - 6y_1 \end{cases} \quad (10)$$

を導くことができます。

## 1.3 問題 (3)

$$5y'' + 2xy' + 3y = 0 \quad (11)$$

これも問題 (1) と同じです。ただ、式の中に  $x$  が入っているだけです。問題 (1) の式 (2) と同じ変数変換すると、問題の式は、

$$5\frac{dy_1}{dx} + 2xy_1 + 3y_0 = 0 \quad (12)$$

と変形できます。したがって、求める連立方程式は

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{5}(3y_0 + 2xy_1) \end{cases} \quad (13)$$

となります。

## 1.4 問題 (4)

$$y''' + y' + xy = 0 \quad (14)$$

$$(15)$$

これは3階の常微分方程式ですが、考え方は2階の場合と全く同じです。変数の変換が

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \\ y_2(x) = y''(x) \end{cases} \quad (16)$$

となるだけです。この変数変換によって、

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \end{cases} \quad (17)$$

を直ちに導くことができます。問題の式にこれらを代入すると

$$\frac{dy_2}{dx} + y_1 + xy_0 = 0 \quad (18)$$

となります。式(17), (18)から求める連立方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -xy_0 - y_1 \end{cases} \quad (19)$$

です。

## 1.5 問題(5)

$$5y'' + y' + y = \sin(\omega x) \quad (20)$$

(21)

右辺に  $\sin(\omega x)$  があり非同次微分方程式となっていますが、新しいことは何もありません。問(1)と同じように変数変換して、計算するだけです。解答は以下の通りです。

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = \frac{\sin(\omega x) - y_0 - y_1}{5} \end{cases} \quad (22)$$

## 1.6 問題(6)

$$xy'' + y' + y = e^x \quad (23)$$

(24)

これも問 (5) とほとんど同じです。

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = \frac{e^x - y_0 - y_1}{x} \end{cases} \quad (25)$$

### 1.7 問題 (7)

$$5y''y' + y' + y = 0 \quad (26)$$

$$(27)$$

非線形項  $y''y'$  がありますが、同じ考え方で式の変形ができます。

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_0 + y_1}{5y_1} \end{cases} \quad (28)$$

### 1.8 問題 (8)

$$y''y' + x^2y'y + y = 0 \quad (29)$$

$$(30)$$

これも、問 (7) と同じ非線形の微分方程式です。

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = -\frac{x^2y_0y_1 + y_0}{y_1} \end{cases} \quad (31)$$