

C, R 回路の周波数応答

1. 概要

本図書では、実験実習「C, R 回路の周波数応答」の講義ノートです。内容は、以下の通りです。

- コンデンサーと抵抗を直列接続した回路のそれぞれの素子の電圧と位相の関係
- 課題(レポート)

2. CR の直列回路の電圧と位相

コンデンサーと抵抗を直列接続した回路のそれぞれの素子の電圧と位相を求めます。最終的な式は、実験プリントに記述されています。それについての補足説明をします。

2.1 微分回路(抵抗の両端)

実験プリントの CR の直列回路(図 1)の抵抗とコンデンサー両端の電圧を求めます。この回路の詳しい解析は、先週渡したプリント「L, C, R 回路の過渡応答」および「C, R 回路の周波数応答」に示しています。先週のプリントでは、実験プリントにしたがって、電流を求めて、それから抵抗の間の電圧を求めました。しかし、ここでは、もっと簡単に求めます。内容は全く同じですが、少し、計算が楽になります。

まず抵抗の両端の電圧 V_R ですが、これは電源の電圧に、抵抗のインピーダンスと回路のインピーダンスの比を乗じたものになります。直列回路だから当然ですよね。したがって、

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{RV}{R - \frac{j}{\omega C}} \\ &= \frac{j\omega CRV}{1 + j\omega CR} \end{aligned} \quad (1)$$

です。これは、近似のない全く、正確な式です。ここで、 $CR = \tau$ とすると、実験プリントの最初の式です。当然、インピーダンスを複素数で扱っていますので、この電源電圧 V は複素数の扱いが必要です。したがって、 V_R も複素数となります。

つぎに、 $\omega CR \ll 1$ の場合について考えます。テイラー展開をして、1 次の項まで取ると、

$$V_R \approx j\omega CRV \quad (2)$$

です。テイラー展開については、先週のプリントの付録を見てください。先に述べたように、電源の電圧 V は複素数で取り扱わなくてはなりません。そこで、

$$V = V_0 \exp(j\omega t) \quad (3)$$

とおきます。すると、(2)式は、

$$V_R \approx CR \frac{dV}{dt} \quad (4)$$

と書くことができます。 $\omega CR \ll 1$ の場合、すなわち $\tau \ll 1/\omega$ 、時定数に比べて信号の周期が長いとき、抵抗両端の電圧は電源の電圧の微分になります。

抵抗の両端の電圧が決まったので、実験プリントに示しているゲインを計算します。ゲイン G_R の定義は、

$$G_R = 20 \times \log_{10} \left(\frac{|V_R|}{|V|} \right) \quad (5)$$

とします。実験プリントでは、複素数の取り扱いがあいまいなところがありますので、正確には(5)式です。要するに、複素数の絶対値に比になっています。 V_R は(1)式により、 V は(3)式により分かっていますので、それぞれをゲインの定義の(5)式に代入すると、

$$\begin{aligned} G_R &= 20 \times \log_{10} \left(\frac{\left| \frac{j\omega CR V_0 \exp(j\omega t)}{1 + j\omega CR} \right|}{|V_0 \exp(j\omega t)|} \right) \\ &= 20 \times \log_{10} \left(\frac{\sqrt{\frac{j\omega CR V_0 \exp(j\omega t)}{1 + j\omega CR} \times \frac{-j\omega CR V_0 \exp(-j\omega t)}{1 - j\omega CR}}}{\sqrt{V_0 \exp(j\omega t) \times V_0 \exp(-j\omega t)}} \right) \\ &= 20 \times \log_{10} \left(\frac{\frac{\omega CR V_0}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}}{V_0} \right) \\ &= 20 \times \log_{10} \left(\frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

となります。これが、微分回路のゲインの理論式です。つぎに、位相角の理論式を求めます。

つぎに、電源電圧と抵抗の両端に電圧の位相差 θ_R を求めます。それぞれの電圧は、複素数で、式(1)と(3)から計算できます。(3)式は簡単ですが、(1)式は、分かりにくいので少し変形します。

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{j\omega CR V}{1 + j\omega CR} \\ &= \frac{j\omega CR + (\omega CR)^2}{1 + (\omega CR)^2} V \\ &= \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \left(\frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} + \frac{j}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \right) V \\ &= \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} V \exp(j\alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

となります。ここで、 α は

$$\alpha = \arctan \left(\frac{1}{\omega CR} \right) \quad (8)$$

です。もちろん、 $\arctan(z) = \tan^{-1}(z)$ です。結果の(8)式を見ると、電源の電圧 V と抵抗両端の電圧 V_R の位相差 θ_R は、 α になることが分かります。もう一度、(8)式を書き直すと

$$\theta_R = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right) \quad (9)$$

です。実を言うと、ちょっとばかり技巧的に見えますが、ゲインも(7)式から求めるほうが、簡単です。次の積分回路の時、その方法を示します。

2.2 積分回路(コンデンサーの両端)

次に、コンデンサーの両端の電圧 V_C ですが、これは電源の電圧に、コンデンサーのインピーダンスと回路のインピーダンスの比を乗じたものになります。抵抗の場合と同じですよ。したがって、

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{-\frac{j}{\omega C} V}{R - \frac{j}{\omega C}} \\ &= \frac{V}{1 + j\omega CR} \end{aligned} \quad (10)$$

です。これも、近似のない全く、正確な式です。ここで、 $CR = \tau$ とすると、実験プリントの最初の式です。

つぎに、 $\omega CR \gg 1$ の場合について考え、積分回路と呼ばれる所以を示します。条件が、先の微分回路と逆ですよ。気をつけてください。先週のプリントの付録のテーラー展開のところに示したように、その逆数をとって、 $1 \gg 1/\omega CR$ として計算するのが常套手段です。したがって、(10)式は、

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{V}{1 + j\omega CR} \\ &= \frac{1}{j\omega CR} V \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \end{aligned} \quad (11)$$

となります。この式は、(1)式の大小関係と同じです。微分回路のところと同じように、これをテーラー展開して、1次の項まで取ると、

$$V_C \approx \frac{1}{j\omega CR} V \quad (12)$$

となります。電源の電圧 V は(3)式で示されるので、(12)式は、

$$V_C \approx \frac{1}{CR} \int v dt \quad (13)$$

と書き表せます。コンデンサー両端の電圧出力は電源電圧の積分の形なので、積分回路と呼

ばれます。

つぎにゲインを求めます。微分回路と同じ手順でも求められますが、ちょっと違う手順で求めます。計算は、微分回路の位相角と同じです。(10)式から出発します。これを変形すると、

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{V}{1+j\omega CR} \\ &= \frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2} V \end{aligned} \quad (14)$$

となります。(7)式の V_R と(14)式の V_C を足し合わせると、電源電圧 V になることを確認してください。これを、分かりやすい式に変形します。すると、

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} - \frac{j\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \right) V \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} V \exp(-j\beta) \end{aligned} \quad (15)$$

です。ここで、

$$\beta = \arctan(\omega CR) \quad (16)$$

です。ゲインを求める前に、電源の電圧 V と抵抗両端の電圧 V_R の位相差 θ_C が求まりました。 β が位相角になります。もう一度、(16)式を書き直すと

$$\theta_C = \arctan(\omega CR) \quad (17)$$

です。ただし、微分回路と積分回路では、位相の進む方向が逆であることに注意してください。ところで、本題のゲインに戻りますと、その定義は(5)式とおなじです。(15)式と(3)式を使い、(6)式と同じように計算すると、ゲイン G_C は、

$$\begin{aligned} G_C &= 20 \times \log_{10} \left(\frac{\left| \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} V_0 \exp(j\omega t) \exp(-j\beta) \right|}{|V_0 \exp(j\omega t)|} \right) \\ &= 20 \times \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

となります。

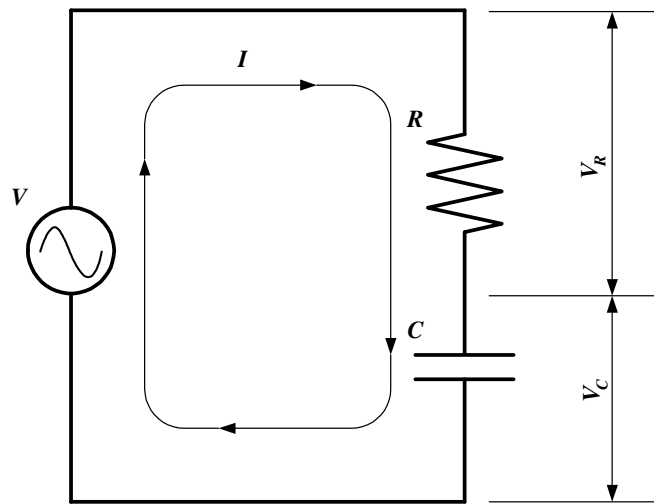


図 1 CR 直列回路

3. 課題(実験レポート)

3.1 レポート作成条件

今週も校舎の改修工事により、実験ができませんので、課題を与えます。いつものように、実験のスタイルでレポートを提出してください。レポートを作成にあたり、以下のことを守ってください。

- ・提出期日は、中間試験もありますので、7月7日(月)いっぱいとしします。
- ・ワープロ、手書きでもどちらでも OK とします。
- ・他人のを写すことは、厳禁とします。ただし、内容を理解するために、相談して書くのは、OK です。
- ・実験は行いませんが、レポートの形式は実験のレポートと同一とします。
- ・当然、実験方法も記入しなくてはなりません。さらに、実験のプリントに記述されている考察についても、記述してください。

レポートの条件です。

- ・実験のプリントで実験をしたつもりで、作成してください。レポート作成に必要な測定データは、次ページの表 1, 2 をつかってください。
- ・表 1, 2 を完成させて、片対数グラフを作成します。1 枚のグラフに、以下について、プロットすること。

- ・微分回路のゲイン G_R の実測値
- ・微分回路のゲイン G_R の理論値
- ・微分回路の位相角 θ_R の実測値
- ・微分回路の位相角 θ_R の理論値
- ・積分回路のゲイン G_C の実測値
- ・積分回路のゲイン G_C の理論値
- ・積分回路の位相角 θ_C の実測値
- ・積分回路の位相角 θ_C の理論値

- ・周波数範囲が広いので、実験のプリントにあるように、片対数グラフに結果を記入してください。

3.2 測定結果データ

表1と表2に以前の測定結果を示す。この結果を用いて、レポート作成のこと。

表1 微分回路(抵抗の両端)

周波数 f [Hz]	入力電圧 V [V]	出力電圧 V _R [V]	リサージュ図形		位相角 θ _R [deg]		利得 G _R [dB]	
			X [mm]	x [mm]	理論値	実測値	理論値	実測値
100	1.0	0.0075	X = x					
200	1.0	0.0143	X = x					
400	1.0	0.0302	X = x					
600	1.0	0.0456	X = x					
800	1.0	0.0605	X = x					
1000	1.0	0.0752	X = x					
1500	1.0	0.108	X = x					
2000	1.0	0.143	0.42	0.41				
3000	1.0	0.223	0.70	0.66				
4000	1.0	0.291	0.88	0.80				
5000	1.0	0.344	1.09	0.97				
6000	1.0	0.400	1.24	1.09				
7000	1.0	0.450	1.40	1.20				
8000	1.0	0.498	1.55	1.30				
9000	1.0	0.542	1.66	1.32				
10k	1.0	0.576	1.80	1.36				
20k	1.0	0.788	2.39	1.27				
40k	1.0	0.890	2.69	1.11				
60k	1.0	0.920	2.76	0.60				
80k	1.0	0.925	2.78	0.46				
100k	1.0	0.934	2.78	0.40				
200k	1.0	0.940	2.80	0.25				

表2 積分回路(コンデンサの両端)

周波数 f [Hz]	入力電圧 V [V]	出力電圧 V _C [V]	リサージュ図形		位相角 θ _C [deg]		利得 G _C [dB]	
			X [mm]	x [mm]	理論値	実測値	理論値	実測値
100	1.0	0.905	27.2	0.1				
200	1.0	0.905	27.4	0.5				
400	1.0	0.904	27.4	1.2				
600	1.0	0.904	27.4	1.5				
800	1.0	0.904	27.4	2.0				
1000	1.0	0.903	27.4	2.5				
1500	1.0	0.900	27.3	3.4				
2000	1.0	0.898	27.3	4.5				
4000	1.0	0.860	26.2	8.4				
6000	1.0	0.807	25.0	11.0				
8000	1.0	0.755	23.5	12.5				
10k	1.0	0.700	21.4	13.4				
12k	1.0	0.645	20.2	13.4				
14k	1.0	0.597	18.3	13.4				
16k	1.0	0.552	17.0	13.3				
18k	1.0	0.510	15.8	13.0				
20k	1.0	0.477	14.7	12.6				
40k	1.0	0.268	8.2	7.7				
60k	1.0	0.182	5.7	5.5				
80k	1.0	0.138	4.3	4.2				
100k	1.0	0.112	3.6	3.6				
200k	1.0	0.058	2.0	2.0				

