Mathematicaによるフーリエ変換の解説ノート

山本昌志*

2005 年 5 月 6 日

1 離散フーリエ変換

ここでの離散フーリエ変換の説明については、参考文献 [1] を大いに参考にした。

1.1 区間 $[0, 2\pi]$ の場合

数学で学習するフーリエ変換は、連続的な関数を対象にする。しかし実際の測定量、例えば電圧などは離散データであることの方が圧倒的に多い。そこで、このような離散的なデータを計算機でフーリエ変換することを考える。これを離散フーリエ変換と言い、コンピューターが得意とする分野である。フーリエ変換という名前が付いているが、実際にはフーリエ級数に近い。これからの説明は、フーリエ級数の展開係数を求めたことを思い出しながら読めば理解しやすいであろう。

フーリエ級数では周期が重要であったが、離散フーリエ変換ではデータの区間がそれに対応する。任意の区間については後ほど述べることとし、まずは話を簡単にするためにそれが 2π の場合を考える。0〜2π 秒の間で電圧を測定したようなものである。離散フーリエ変換の結果をこの区間を越えて拡張する場合[1]、区間 2π と同じ周期が現れる。

この区間で N 個の等間隔でデータが得られた考える。等間隔ということは重要で、それを

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j, \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{1}$$

と表す。一方、従属変数の方は、

$$f_j = f(x_j) \tag{2}$$

と表現することにする。実験データでは、x_j は時刻、f_j が電圧というようになる。オシロスコープや AD 変換器を用いてデータを取得したような状況を考えればよい。

ここでは、測定量 (x_j, f_j) の組は N 個ある。この N 個のデータを操作して、得られる 1 次独立なデータ数は最大 N 個である。このことから、フーリエ係数は N 個が限界であることが分かる。従って、展開の基底も N 個となり、それを

$$\left\{1, e^{ix}, e^{2ix}, e^{3ix}, \cdots, e^{(N-1)ix}\right\} \tag{3}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

[1]逆フーリエ変換の結果をこの区間を越えて適用する場合である。

のように選ぶ。基底の線形和として、元の関数 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)ix} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx} \end{aligned} \tag{4}$$

として表すことができる。このように三角関数の和で表すことを、フーリエ級数と言うのである。ここで残された問題は、測定量の x_j と f_j から c_k を決めるにはどのようにするかである。これは比較的簡単で、

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx_j} \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, N-1) \tag{5}$$

の連立方程式を解けばよろしい。この式の形が分かりにくい。それではもう少し分かり易く書いてみよう。

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{ix_0} & e^{2ix_0} & \dots & e^{(N-1)ix_1} \\ 1 & e^{ix_1} & e^{2ix_1} & \dots & e^{(N-1)ix_1} \\ 1 & e^{ix_2} & e^{2ix_2} & \dots & e^{(N-1)ix_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{ix_{N-1}} & e^{2ix_{N-1}} & \dots & e^{(N-1)ix_{N-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

x_j は既知なので、この $N \times N$ の行列は計算可能である。左辺も既知である。従って、この連立方程式から、未知数 c_k を決めれば良い。ちまたでよく使われる高速フーリエ変換 (First Fourier Transform 略して FFT) は、この c_k を高速に計算している。

「なるほど、連立方程式ならば計算機は得意なので、式 (6) を解けば話は終わり」と思ってしまうかもしれないが、そんなに世の中は甘くない。$N = 1000$ 位になるとこの式を計算するのにかなりの時間がかかり実用に適さない。実際、FFT を使いたい場面ではリアルタイム (少なくとも 1 秒くらい) で計測が終わる必要があるので、計算の高速化を図らなくてはならない。そこで、計算量を減らすことを考える。

そのために、N を整数、ℓ も整数であるがその範囲は 0, 1, 2, $\cdots$, $N-1$ とした場合の

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\ell x_j} = \begin{cases} 0 & \ell \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 & \ell = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{7}$$

を使う。この式の計算については、3.1 節を見よ。さて、ここからが本題で、式 (5) の両辺に

$$\frac{1}{N} e^{-ik'x_j}, \quad \text{ただし、} \quad k' = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{8}$$

を乗じて、j について和を取る。すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ik'x_j} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx_j} \right) e^{-ik'x_j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_k e^{ix_j(k-k')} \\ &\qquad \text{式 (17) から、} k = k' \text{ 以外はゼロになる} \\ &= c_{k'} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。これで、c_k を求める式が得られた。もう少しきれいにまとめると、

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikx_j} \tag{10}$$

である。この式が離散フーリエ変換 (DFT) と呼ばれるものである。もう少し分かりやすく書くと、

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-ix_0} & e^{-ix_1} & e^{-ix_2} & \dots & e^{-ix_{N-1}} \\ e^{-2ix_0} & e^{-2ix_1} & e^{-2ix_2} & \dots & e^{-2ix_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-(N-1)ix_0} & e^{-(N-1)ix_1} & e^{-(N-1)ix_2} & \dots & e^{-(N-1)ix_{N-1}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

である。

以上をまとめると、区間 $[0,\, 2\pi]$ の場合の離散逆フーリエ変換が式 (4)、離散フーリエ変換が式 (10) である。

1.2 区間 $[0, T]$ の場合

これまでは区間 $[0,\, 2\pi]$ での離散フーリエ変換について説明してきたが、これからはもっと一般的な問題を取り扱うために、区間 $[0,\, T]$ について述べる。区間幅 T で $[t_0, t_0+T]$ の方がより一般的と考えるかもしれないが、これは $t' = t - t_0$ のようにシフトすれば $[0,\, T]$ となるので同じである。

独立変数を t として、区間でのデータの取得は

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{T}{N}j \\ &= \Delta t j, \qquad (j = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N-1) \end{aligned} \tag{12}$$

とする。展開の基底を、

$$\left\{1,\, e^{i\frac{2\pi}{T}t},\, e^{2i\frac{2\pi}{T}t},\, e^{3i\frac{2\pi}{T}t},\, \cdots,\, e^{(N-1)i\frac{2\pi}{T}t}\right\} \tag{13}$$

のように選ぶ。ここで、$\omega = \frac{2\pi}{T}$ とする。もし、測定間隔が時間の場合、この ω は角振動数となる。このようにすると、基底は

$$\left\{1,\, e^{i\omega t},\, e^{2i\omega t},\, e^{3i\omega t},\, \cdots,\, e^{(N-1)i\omega t}\right\} \tag{14}$$

と書き改められる。ここで、1 は直流成分を表し、あとは等間隔に周波数成分が現れることになる。データ点の場所では、直流成分と $N\omega$ は区別がつかないことに注意が必要である[2]。同様に、角振動数が $N\omega$ シフトした場合も区別が付かない。

基底の線形和として、元の関数 $f(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t} + \cdots + c_{N-1}e^{(N-1)i\omega t} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{in\omega t} \end{aligned} \tag{15}$$

[2] $\cos(N\omega t_j)$ は、どんな j に対しても、常に 1 である。直流成分も、どんな j に対しても 1 である。

となる。これは、フーリエ逆変換である。今は離散データを問題としているので、$f(\Delta tj)$ を f_j と書くのが良いだろう。すると、離散フーリエ逆変換は

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{in\omega t_j} \tag{16}$$

と書き表せる。この C_n を求めれば良いのである。これを前節と全く同じ方法で求める。$\omega t_j = \frac{2\pi}{N} j$ なので前節の x_j と同一である。従って、

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\ell\omega t_j} = \begin{cases} 0 & \ell \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 & \ell = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{17}$$

である。式 (16) の両辺に $\frac{1}{N} e^{-in'\omega t_j}$ を乗じて、j で和をとると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in'\omega t_j} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{in\omega t_j} \right) e^{-in'\omega t_j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_n e^{i(n-n')\omega t_j} \\ &= c_{n'} \end{aligned} \tag{18}$$

となる。従って、この場合の離散フーリエ変換は

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\omega t_j} \tag{19}$$

となる。

1.3 まとめと実際の計算

これまで示した離散フーリエ変換の結果をまとめて、整理しておく。区間 $[0, 2\pi]$ の場合は、

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikx_j} \qquad \text{離散フーリエ変換} \tag{20}$$

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx_j} \qquad \text{逆離散フーリエ変換} \tag{21}$$

である。区間 $[0, T]$ の場合は

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-in\omega t_j} \qquad \text{離散フーリエ変換} \tag{22}$$

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{in\omega t_j} \qquad \text{逆離散フーリエ変換} \tag{23}$$

である。ただし、$\omega = 2\pi/T$ である。

データが $[\{0,\, f_0\},\, \{\Delta t,\, f_1\},\, \{2\Delta t\, f_2\},\, \cdots,\, \{(N-1)\Delta t,\, f_{N-1}\}]$ の場合の離散フーリエ変換のプログラムを作成する式を示しておくのが良いだろう。そこで、区間 $[0,\, T]$ の式を $\omega = 2\pi/T$ と $t_j = \frac{T}{N}j$ を使って、

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi ijn/N} \qquad \text{離散フーリエ変換} \tag{24}$$

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2\pi ijn/N} \qquad \text{逆離散フーリエ変換} \tag{25}$$

と書き改める。コンピューターで離散フーリエ変換を計算する場合は、これらの式を計算すべきである。c_n は $n\omega$ の振幅、f_j は $j\Delta t$ の時の値を表している。

2 Mathematcaのフーリエ変換

マニュアル [2] から、Mathematica のフーリエ変換の定義を調べる。それによると、デフォルトの設定の場合の離散フーリエ変換と逆離散フーリエ変換は

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{r=1}^{n} u_r e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n} \qquad \text{離散フーリエ変換} \tag{26}$$

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n} v_s e^{-2\pi i(r-1)(s-1)/n} \qquad \text{逆離散フーリエ変換} \tag{27}$$

となっている。ここで、v_s はフーリエ係数、u_r はデータの並び、n はデータ数である。

1 節で示した離散フーリエ変換は、N 個のデータの並びが、$0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, N-1$ のように 0 から始まっていた。それに対して、Mathematica の場合は、1 から始まるっている。Mathematica のフーリエ変換を調べるために、その並びを 0 から数え始めること

$$v'_s = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{r=0}^{N-1} u'_r e^{2\pi irs/N} \qquad \text{離散フーリエ変換} \tag{28}$$

$$u'_r = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{s=0}^{N-1} v'_s e^{-2\pi irs/N} \qquad \text{逆離散フーリエ変換} \tag{29}$$

となる。こうなると、式 (24) や (25) とほとんど同じであることが分かる。前節と Mathematica のフーリエ変換で異なる部分は、

- 前節の結果では、和の前の係数が $1/N$ や 1 になっている。それに対して、Mathematica では $1/\sqrt{N}$ となっている。
- 指数関数の符号が前節と Mathematica で異なる。

である。この違いは、Mathematica では基底関数として

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{N}},\, \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{N}},\, \frac{e^{-2i\omega t}}{\sqrt{N}},\, \frac{e^{-3i\omega t}}{\sqrt{N}},\, \cdots,\, \frac{e^{-(N-1)i\omega t}}{\sqrt{N}}\right\} \tag{30}$$

としているためでる。本質的な違いはなにもない。

以上をまとめると、Mathematica の離散フーリエ変換は、次のようになる。

- 離散フーリエ変換の結果の v_s は、$(s-1)\omega$ の角振動数の振幅を表す。$(s-1)/T$ の振動数の振幅と言っても良い。
- 逆離散フーリエ変換の結果の u_r は、$(r-1)\Delta t$ の時の値を表す。

ただし、$\omega = \frac{2\pi}{n\Delta t}$ である。また、Mathematica を使って離散フーリエ変換を行う場合、Δt の情報は Mathematica には伝わらないので、ユーザーがそれを把握して、周波数に直す必要がある。

3 付録

3.1 指数関数の級数和

式 (17) に示された $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{i\ell x_j}$ は以下のように等比級数の和を考えることにより導くことができる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{i\ell x_j} &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(e^{i\ell\frac{2\pi}{N}}\right)^j \\ &= \frac{1}{N}\frac{1-e^{i\ell\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{i\ell\frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N}\frac{1-e^{2\pi i\ell}}{1-e^{2\pi i\frac{\ell}{N}}} \end{aligned} \tag{31}$$

ℓ は整数なので分子は常にゼロで、分母は ℓ/N が整数でないときはゼロではない。従って、ℓ/N が整数でないとき ($\ell \neq 0$ の場合)、この式はゼロになることが分かる。一方、ℓ/N が整数のとき ($\ell = 0$ の場合)、分母もゼロとなる。このときの式の値を評価するために、分母分子をテイラー展開して、$\ell \to 0$ の極限を考える。

$$\begin{aligned}\lim_{\ell\to 0}\frac{1}{N}\frac{1-e^{2\pi i\ell}}{1-e^{2\pi i\frac{\ell}{N}}} &= \lim_{\ell\to 0}\frac{1}{N}\frac{1-(1+2\pi i\ell-4\pi^2\ell^2+\cdots)}{1-(1+2\pi i\frac{\ell}{N}-4\pi^2\frac{\ell^2}{N^2}+\cdots)} \\ &= \lim_{\ell\to 0}\frac{-2\pi i\ell+4\pi^2\ell^2+\cdots}{-2\pi i\ell-4\pi^2\frac{\ell^2}{N}+\cdots} \\ &= 1\end{aligned} \tag{32}$$

以上より、式 (17) が求められた。しかし、最後の $\ell \to 0$ の極限の操作はかなり強引に思えるが、数学の専門家はどう考えるか興味がある。

参考文献

[1] 石岡圭一. FFT 高速アルゴリズムの発見. 数学セミナー 1998 年 12 月号, pp. 34–39. 日本評論社, 1998.

[2] スティーブウルフラム. Mathematica ブック 5. Wolfram Media, 2003.